

مشتق راست، مشتق چپ:

اگر حد مورد بحث را از یک طرف بررسی کنیم، به آن مشتق راست یا مشتق چپ می‌گویند.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{مشتق راست:}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{مشتق چپ:}$$

شرط کافی برای آن که تابعی در اطراف یک نقطه مشتق پذیر باشد آن است که مشتق راست و چپ برابر داشته باشد. دقت کنید که شرط لازم مشتق پذیری پیوستگی است.

در گزاره شرطی $p \rightarrow q$ به شرط آن که کل گزاره درست باشد، p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می نامند.

غلط است: مشتق پذیر است $\rightarrow$ اگر تابع پیوسته باشد

درست است: پیوسته است $\rightarrow$ اگر تابع مشتق پذیر باشد

مثال: مشتق راست و چپ تابع زیر را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$$

حل: تابع فوق در $x = 1$ پیوسته است. پس مشتق پذیر است:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = -2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= 2 \times 2 = 4$$