ریاضی ۲

- فصل ۷

آنالیز ترکیبی:

آنالیز ترکیبی شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن روش‌هایی برای به‌دست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل، بدون شمارش معرفی می‌گردد.

فاکتوریل:

اگر n یک عدد طبیعی باشد:

$n! = n(n-1)(n-2)\times...\times 1$

نتیجه: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = ...$

قرارداد: $0! = 1$

اصل جمع:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد و انجام همزمان این دو عمل، غیرممکن باشد، تعداد حالات انجام عمل اول یا عمل دوم برابر است با $n_1 + n_2$. مثلاً اگر هشت پیراهن آبی و ۱۲ پیراهن قرمز داشته باشیم به ۲۰ حالت می‌توانیم پیراهن بپوشیم.

اصل ضرب:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد، به فرض آنکه وقوع این اعمال بر یکدیگر تأثیری نداشته باشد تعداد حالات انجام همزمان این دو عمل برابر است با $n_1 \times n_2$. مثلاً اگر ۵ پیراهن و ٤ شلوار داشته باشیم به ۲۰ طریق می‌توان لباس پوشید.

جایگشت n شیء متمایز:

حالات مختلف قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء می‌نامند. در واقع حالات جابه‌جاشدن n شیء در یک ردیف را جایگشت آن n شیء می‌نامند. مثلاً جایگشت سه حرف a,b,c عبارت است از bac، acb، abc، cba، cab و bca.

قضیه: تعداد جایگشت های n شئ متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با: n!

تذکر: در این درس هرگاه صحبت از جایگشت می شود ، منظور تعداد جایگشتهاست .

☜مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ به چند طریق می‌توان عدد هفت رقمی زوج بدون ارقام تکراری نوشت.

✍ حل:

برای آنکه عدد زوج باشد باید رقم سمت راست آن زوج باشد .

در حالتی که تکرار ارقام جایز نیست ، باید نسبت به وضعیت صفر مسأله را به دو حالت تقسیم کرد .چون اگر صفر در سمت چپ قرار بگیرد عدد هفت رقمی نخواهد بود لذا مسأله را در دو حالت بررسی می کنیم .

حالت اول حالتی است که صفر در سمت راست قرار دارد و لذا دیگر در سمت چپ قرار نخواهد گرفت و حالت دوم حالتی است که ارقام زوج دیگر در سمت راست قرار بگیرند .

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{0}{\underline{1}} \\ \\ \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{\substack{2\\4\\6}}{\underline{3}} \end{array}\right\} \rightarrow \text{جواب} = 6! + 15\times 5!$$

مثال: جواب مثال قبلی در حالتی که ارقام امکان تکرار شدن داشته باشند را به دست آورید .

حل:

$\underline{۶}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۴} \rightarrow$ جواب $= ۶\times۷^{۵}\times۴$

(۰، ۲، ۴، ۶)

در این حالت چون امکان تکرار وجود دارد، به دو حالت کردن مسأله نیاز نیست، چون هم‌چنان باید مواظب باشیم صـفر در سمت چپ عدد قرار نگیرد.

مثال: با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت به طوریکه تکرار ارقام جایز باشد.

حل: با تقسیم کردن اعداد بزرگتر از ۳۵۰۰ به دو گروه خواهیم داشت:

$\underline{۱}\quad \underline{۳}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}$ (۳؛ ۵، ۶، ۷) $\quad ۱\times۳\times۸\times۸$

$\underline{۴}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}$ (۴، ۵، ۶، ۷) $\quad ۴\times۸\times۸\times۸$

$\rightarrow$ تعداد اعداد: $۳\times۸^{۲}+۴\times۸^{۳}-۱$

خود ۳۵۰۰ را نمی‌خواهد

مثال: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می‌توان تشکیل داد که حرف اولش نقطه نداشته باشد؟

حل:

$\underline{۴}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴} \rightarrow = ۴\times۵\times۴ = ۸۰$

(م، ه، و، ر)

دقت کنید که «ی» در اول کلمه نقطه‌دار می‌شود.

مثال: تعداد حالاتی که می‌توان چهار کتاب ریاضی مختلف و سه کتاب فیزیک مختلف را یک در میان در قفسه کنار هم قرار داد چقدر است؟ اگر چهار کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک موجود بود جواب مسأله چه می‌شد؟

حل:

ر ف ر ف ر ف ر $\rightarrow ۴!\times۳!$

(ف / ر) ر ف ر ف ر ف $\rightarrow$ می‌تواند ریاضی شروع‌کننده باشد یا فیزیک $\rightarrow ۲\times۴!\times۴!$

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که شامل عدد ۲ باشد؟

حل: به‌جای دسته بندی مسأله به سه حالت بهتر است تنها حالت غیر قابل قبول را از بین حالات حذف کنیم:

$\underline{۸}\quad \underline{۹}\quad \underline{۹}$ اعداد فاقد ۲: ۸×۹^{۲}

اعداد شامل ۲: $۹۰۰-۸\times۹^{۲} = ۹(۱۰۰-۷۲) = ۹\times۲۸ = ۲۵۲$

مثال: اگر $A=\{2,3,4\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$؛

الف) چند تابع از A به B می‌توان تعریف کرد؟ ب) چند تابع پوشاست؟

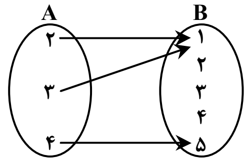
ج) چند تابع یک‌به‌یک است؟ د) چند تابع صعودی اکید است؟

حل: الف)

$$f:\underset{m\ \text{عضو}}{A}\to\underset{n\ \text{عضو}}{B}\Rightarrow \text{تعداد توابع}=n^m=5^3$$

$$D_f=A$$

مانند:



ب) تعداد توابع پوشا صفر است زیرا $n(A)<n(B)$ و به‌کمک ۳ عضو نمی‌توان ۵ عضو را پوشاند.

ج) اما تعداد توابع یک‌به‌یک: $\binom{5}{3}\times 3!=\frac{5!}{3!2!}\times 3!=60$

د) تعداد توابع صعودی اکید: $\binom{5}{3}\times 1=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$

قضیه طناب پیچ:

تعداد جایگشت n شیء متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار گرفته باشند برابر است با $(n-r+1)!r!$ و تعداد جایگشت‌های n شیء معین و متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار نداشته باشند، برابر است با $n!-(n-r+1)!r!$

مثال: با حروف a,b,c,d,e,f چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که حتماً a,b کنار هم باشند و c,d کنار هم نباشند؟

حل:

ab,c,d,e,f $\to$ تعداد حالاتی که a,b کنار هم هستند $=5!\times 2!$

ab (cd) (e f) $\to$ تعداد حالاتی که a,b کنار هم هستند و c,d کنار همند $=4!\times 2!\times 2!$

تعداد حالاتی که a و b کنار همند و c و d کنار هم نیستند $=5!\times 2!-4!\times 2!\times 2!$

مثال: ۵ نفر a، b، c ، d و e می‌خواهند سخنرانی کنند. به چند حالت بین فرد a و b فقط یک نفر سخنرانی می‌کند؟

حل:

a □ b Δ *

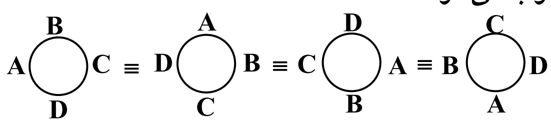
۳ نفر می‌توانند بین a,b صحبت کنند

$$3!\times 2\times 3=36$$

جایشگت ۳ شیء — جابجا شدن a,b — افرادی که بین a,b صحبت می‌کنند

جایگشت با اشیاء دایره‌ای:

اگر ابتدا و انتهای یک صف را به هم متصل کنیم و یا n شیء را دور یک میزگرد قرار دهیم، جایگاه شروع و پایان بی‌معنی می‌شود. در واقع چهار حالت زیر با هم معادلند و یک حالت محسوب می‌شوند:



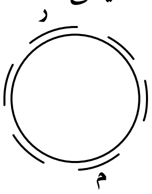
لذا اگر اشیا به صورت دایره ای چیده شود فرد اولی که تصمیم به نشستن می‌گیرد، دارای ۱ انتخاب است چون بین مکانهای نشستن هیچ تفاوتی نیست، اما بقیه افراد به نسبت این فرد، دارای مکان خواهند شد که $n-1$ نفر باقیمانده دارای $(n-1)!$ جایگشت هستند.

تذکر: اگر اشیاء قابل وارونه‌سازی باشند (مانند دسته کلید، دست‌بند، گردنبند و تسبیح) تعداد جایگشت n شیء برابر است با $\frac{(n-1)!}{2}$ در این حالت جهت چرخش نیز فاقد اهمیت می‌باشد.

مثال: اگر رئیس، معاون و چهار کارمند مختلف بخواهند دور یک میز بنشینند، این کار به چند طریق امکان پذیر است هرگاه:

الف) رئیس مقابل معاون باشد:

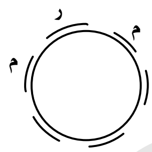
حل: اگر رئیس بنشیند، معاون فقط می‌تواند در مکان مقابل رئیس بنشیند و ٤ کارمند به دلخواه می‌توانند بنشینند. (یعنی مسئله تبدیل به صف می‌شود.)



$4! = 24$

ب) رئیس مجاور معاون باشد:

حل: در این حالت معاون برای نشستن ۲ انتخاب دارد که در کدام طرف رئیس بنشیند.



$\underset{\uparrow\ \text{جای معاون}}{4! \times 2} = 48$

جایگشت با اشیاء تکراری:

اگر بخواهیم جایگشت n شیء که k_1 تا از آنها از نوع اول، k_2 تا از آنها از نوع دوم و ... و k_m تا از آنها از نوع m ام باشد را حساب کنیم (با شرط اینکه $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$) تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$

مثال: با ارقام ۰و۰و۰و٤و٤و٤و٥و٥و٥ چند عدد ۹ رقمی می‌توان ساخت؟

حل: فرض کنید ارقام متمایز باشند، مثلاً $0, 0', 0'', 4, 4', 4'', 5, 5', 5''$. در پایان وقتی اعداد ۹ رقمی نوشته شد، جایگشت اشیاء تکراری را حذف می‌کنیم.

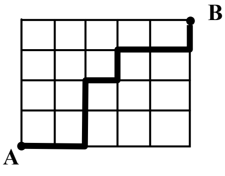
برای سمت چپ نمی‌توانیم از صفر استفاده کنیم.

$$\frac{\overset{\uparrow}{6} \times 8!}{3! \times 3! \times 3!}$$

مثال: با ارقام ۰و۰و۰و٤و٤و٤و٤ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

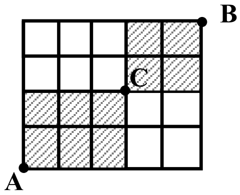
حل: فرض کنید ارقام متمایز باشند، تعداد جایگشتها بدون در نظر گرفتن تکرار برابر است با: $\frac{4 \times 7!}{4! \times 4!}$

مثال: در شبکه مستطیلی شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه A به نقطه B حرکت کرد به طوری که کوتاه‌ترین مسیر پیموده شود؟



حل: برای آن‌که با کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم باید حداقل ۹ حرکت انجام دهیم. مثلاً دنباله rruururru نشان‌دهنده‌ی مسیر فوق است. (r نشان دهنده‌ی حرکت به سمت راست و u نشان دهنده‌ی حرکت به سمت بالاست) باید ٥ حرکت به راست و ٤ حرکت به بالا انجام دهیم یعنی یک دنباله متشکل از ٤ تا u و ٥ تا r که این کار به $\frac{9!}{5!4!}$ حالت امکان‌پذیر است.

مثال: در مسأله فوق اگر بخواهیم تعداد مسیرهایی را بدست آوریم که حتماً از نقطه c بگذرند، به چند طریق ممکن است؟



حل: ابتدا از A به C، سپس از C به B می‌رویم: $\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$

انتخاب:

تا اینجا در مسائل، کلیه داده‌های مسأله در شمارش حالات ممکن مورد استفاده قرار می‌گرفت. حال به بررسی شمارش جایگشت حالاتی می‌پردازیم که در آن قسمتی از مجموعه داده شده انتخاب شده باشد. در اینجا ابتدا باید تعداد حالاتی که می‌توان اشیاء را انتخاب کرد را به دست آورد (ترکیب) و سپس جایگشت اشیا انتخاب شده را محاسبه کرد (تبدیل).

تبدیل:

تعداد حالات قرار گرفتن r شیء که از بین n شیء انتخاب شده‌اند در کنار یکدیگر، جایگشت r شیء از n شیءیا تبدیل r تایی n شیء نامیده می‌شود. در واقع تبدیل، تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء می‌باشد به طوری که ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار یکدیگر، حائز اهمیت باشد.

قضیه: تعداد تبدیل‌هایی r شیء از n شیء برابر است با:

$$P(n,r)=(n)_r=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب:

تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء که در آن ترتیب انتخاب اهمّیت نداشته باشد را ترکیب r تایی n شیء یا ترکیب r از n می‌نامند و با $\binom{n}{r}$ یا $c(n,r)$ نشان می‌دهند.

به عبارت دیگر ترکیب r تایی n شیء یافتن زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی است.

ارتباط بین تعداد حالات انتخاب با ترتیب r شیء از میان n شیء با تعداد حالات انتخاب بدون ترتیب r شیء از میان n شیء به صورت زیر است:

$$P(n,r)=r!\times c(n,r)\Rightarrow c(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

نکته: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که شامل k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$ و تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که فاقد k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r}$ $\quad n-k\geq r$

☜مثال: با حروف کلمه‌ی **computer** چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن **o** و **m** حتماً موجود باشند؟

✍ حل: ابتدا ۳ حرف دیگر که لازم داریم را انتخاب کرده، سپس همه را در یک ردیف می‌چینیم.

$$\underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{۳ حرف دیگر}}\times\underbrace{۵!}_{\text{جایگشت ۵ حرف}}$$

☜مثال: با حروف کلمه **History** چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت که:

الف) حروف صدادار نداشته باشد؟

حروف صدادار **a**، **e**، **i**، **o**، **u** می‌باشند. فقط از ۵ حرف باقیمانده باید ٤ حرف انتخاب کنیم.

$$\binom{۵}{۴}\times۴!=۵\times۴!=۵!$$

ب) با حرف صدادار شروع شود و با حرف بی‌صدا ختم شود؟

$$\underset{\uparrow\, i,o}{\underline{۲}}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underset{\uparrow\, h,s,t,r,y}{\underline{۵}}$$

$$۲\times۵\times۴\times۵=۲۰۰$$

یا $۲\times\left[\binom{۵}{۲}\times۲!\right]\times۵$

ج) با حرف T شروع شود و شامل S باشد؟

ابتدا ۲ عضو دیگر غیر از S را انتخاب کرده و سپس در کنار هم می‌چینیم.

$\{S,-,-\}$ $\binom{5}{2}\times 3!$ $\underline{T}$ _ _ _

مثال: ۸ خط دو به دو متمایز حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

حل: حداکثر تعداد نقاط تقاطع خطوط زمانی است که هر دو خط انتخابی همدیگر را در نقاط متمایز قطع کنند. پس تعداد حالات تقاطع دو خط حداکثر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی که از بین این خطوط می‌توان انتخاب کرد: $\binom{8}{2}$

مثال: از میان پنج مهره قرمز و چهار مهره سفید به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به نحوی که دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد؟

حل: $\binom{5}{2}\binom{4}{1}=40$

قرمز سفید

مثال: از بین ۵ مهره سفید متمایز، ٤ مهره آبی متمایز و ۳ قرمز متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند؟

حل: ابتدا ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم، سپس در کنار هم می‌چینیم: $3!\times\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}$

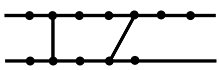
مثال: در یک امتحان دانش‌آموزی باید به هشت سؤال از میان ۱۰ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ به چهار سؤال از پنج سؤال اول اجباری باشد، او به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟

حل: دو حالت امکان‌پذیر است که نهایتاً با هم جمع می‌کنیم: $\underbrace{\binom{5}{4}\binom{5}{4}}_{\text{۴ سوال از ۵ سوال اول}}+\underbrace{\binom{5}{5}\binom{5}{3}}_{\text{۵ سوال از ۵ سوال اول}}=5\times5+10=35$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: دو خط موازی داده شده‌اند. روی یکی از این خطها ۵ نقطه و روی دیگری ۷ نقطه قرار دارد. به چند طریق می‌توان با این نقاط، چهارضلعی ساخت؟

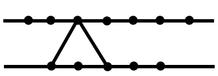
حل: ۲ نقطه از خط بالایی و ۲ نقطه از خط پایینی انتخاب می‌کنیم: $\binom{7}{2}\binom{5}{2}$

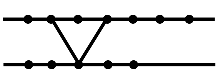


مثال:در مسأله فوق تعداد مثلث‌ها برابر کدام است؟

حل:

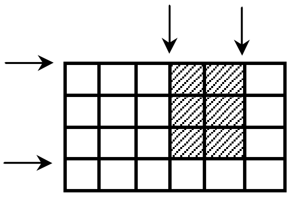
باید دو نقطه از بالایی انتخاب کنیم و یک نقطه از پایینی و یا بالعکس





$\binom{5}{2}\binom{7}{1}+\binom{5}{1}\binom{7}{2}$

مثال: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟



حل: باید ۲ خط از بین خط‌های افقی و ۲ خط از بین خط‌های عمودی انتخاب کنیم: $\binom{5}{2}\binom{7}{2}$

در حالت کلی در یک شبکه $m\times n$ تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با: $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$

مثال: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتماً یک جفت در میان آنها باشد؟

حل: ابتدا ۲ جفت انتخاب کرده و یکی از جفت‌ها را برمی‌داریم. سپس از جفت باقی‌مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{10}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=180$$

راه ۲: ابتدا ۲ جفت برمی‌داریم، سپس ۳ لنگه را انتخاب می‌کنیم که حتماً بینشان ۱ جفت هست.

مثال: ۱۲ نفر متشکل از ٦ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ٤ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد به شرطی که در بین آن‌ها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

حل:

ابتدا ٤ زوج انتخاب می کنیم سپس از بین هر یک از این ٤ زوج یک نفر را انتخاب می‌کنیم ، در این حالت حتماً هیچ زن و شوهری با هم انتخاب نشده‌اند:

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب ٤ زوج}}\times\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

مثال: سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ده پرتاب یک سکه به این منظور رسید کدام است؟

حل: باید از ۹ بار قبلی ۲بار رو آمده باشد: $\binom{9}{2}$

مثال: از بین ۸ نفر قبول‌شده المپیاد، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامد آن که در آن فرد مشخصی حتماً در بین انتخاب شدگان باشد کدام است؟

حل: اگر فرد قبول شده حتماً در بین افراد باشد، کافی است دو نفر دیگر انتخاب کنیم: $\binom{7}{2}$

مثال: تساویهای زیر را با مفاهیم و روابط ترکیب اثبات کنید.

الف) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

اگر بخواهیم از بین جمعی nنفره، k نفر که یکی از آنها رییس باشد، انتخاب کنیم ۲ راه داریم:

۱- اول k نفر را انتخاب می‌کنیم. سپس ۱ نفر را از بین این k نفر به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم: $\binom{n}{k}\binom{k}{1}$

۲- یا اول ۱ نفر را به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم و سپس از بین بقیه افراد، $k-1$ نفر را انتخاب می‌کنیم: $\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$

ب) $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

اگر بخواهیم از ۲ گروه m نفره و n نفره، k نفر را انتخاب کنیم به ۲ طریق امکان‌پذیر است.

۱- هم‌زمان k نفر را انتخاب کنیم. $\binom{m+n}{k}$

۲- از گروه اول و دوم به‌ترتیب افرادی انتخاب کنیم که جمعاً k نفر باشند.

$$\underbrace{\binom{m}{0}}_{\text{۰ نفر از گروه اول}}\underbrace{\binom{n}{k}}_{k\text{ نفر از گروه دوم}}+\cdots+\underbrace{\binom{m}{k}}_{k\text{ نفر از گروه اول}}\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{صفر نفر از گروه دوم}}$$

الگوهای پرکاربرد:

کنار هم چیدن اشیائی که بعضی از آن‌ها نباید کنار هم قرار گیرند:

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می‌چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آن‌ها اشیائی که نمی‌خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می‌دهیم.

☜مثال: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف **b** و پنج حرف **a** می‌توان ساخت به طوری که هیچ‌یک از **a**ها کنار هم نباشند؟

✍ حل: ابتدا **b**ها را می‌چینیم، سپس در فواصل به‌وجود آمده، **a**ها را جایگزین می‌کنیم:

$-b-b-b-b-b-b-b-$ حالت $\binom{8}{5}$

☜مثال: با ارقام ۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱ چند عدد هفت رقمی می‌توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آن‌ها دو رقم متوالی زوج نباشند؟

✍ حل: ابتدا ارقام فرد را می‌چینیم و در بین آن‌ها زوج‌ها را جا می‌دهیم:

– ف – ف – ف – ف –

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{جایگاه رقم زوج}}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت زوج‌ها با هم}}\times\underbrace{4!}_{\text{جایگشت فردها با هم}}$$

☜مثال: حروف EEEFFFDD را به چند طریق می‌توان کنار هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها کنار هم نباشند؟

✍ حل:

$-F-F-F-D-D-$

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{محل قرار گرفتن Eها}}\times\underbrace{\frac{5!}{3!\times 2!}}_{\text{جایگشت Fها و Dها با هم}}$$

گزینه دو مؤسسه آموزشی فرهنگی

چینش اشیائی که عده ای از آنها ترتیبشان از قبل معلوم است:

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه‌ی اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

☜مثال: هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟

✍ حل:ابتدا به $\binom{۷}{۳}$ حالت، طبقه‌ی ساکن شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ٤ طبقه لحاظ می‌کنیم: $\binom{۷}{۳}\times ۴!$

☜مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟

✍ حل:ابتدا ۳ رقم را به $\binom{۱۰}{۳}$ حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

☜مثال: با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها **A** بعد از **O** و نیز **E** بعد از **A** باشد؟

✍ حل: ابتدا مکان A، E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲تا H داریم):

$$\binom{۸}{۳}\times \underbrace{\frac{۵!}{۲!}}_{\text{جایگشت H‌ها با هم}}$$

تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند:

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند، با تقسیم‌بندی مسأله به حالت‌های مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می‌آوریم.

☜مثال: با ارقام ۲ و۲ و٤ و٤ و٦ و٦ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

✍ حل:

{۲,۴,۶} اعداد بدون تکرار ← جایگشت ارقام $۳! = ۶$ حالت

{*,−,−} اعداد با یک تکرار ← $\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{رقم تکرارشونده}}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{رقم غیرتکراری}}\times\frac{۳!}{۲!} = ۱۸$

← کل اعداد $= ۱۸ + ۶ = ۲۴$

مثال: با حروف کلمه **ALIABAD** چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟

حل:

حداکثر یک A: $\binom{5}{4}\times 4!$

دوبار A بیاید: AA: $\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2!}$ ($\binom{4}{2}$: انتخاب ۲ حرف دیگر، $\frac{4!}{2!}$: جایگشت حروف)

سه‌بار A بیاید: AAA: $\binom{4}{1}\times\frac{4!}{3!}$ ($\binom{4}{1}$: انتخاب ۱ حرف دیگر، $\frac{4!}{3!}$: جایگشت حروف)

$\rightarrow$ کـل کلمـات $= 120+72+16 = 208$

خواص ترکیب:

۱- داریم:

الف) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \Rightarrow$ اگر $\binom{n}{x}=\binom{n}{y} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ \text{یا} \\ x+y=n \end{cases}$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است.

یا تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با تعداد زیر مجموعه های $n-r$ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است.

ب) $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$ قاعده پاسکال

این قضیه مفهوماً به این معناست که در انتخاب r عضو یک عضو معین یا حضور دارد یا ندارد. سمت راست شمارش نامنظم و سمت چپ شمارش منظم است.

تعیین ضریب یک جمله از بسط:

نکته: در حالت کلی در بسط $(a_1+a_2+\dots+a_r)^n$ ضریب جمله $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_r^{k_r}$ $(\sum_{i=1}^{r}k_i=n)$ برابر است با $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$

مثال: در بسط $(a+b+c)^5$ ضریب جمله a^3bc کدام است؟

حل: چون جمله a^3bc در واقع aaabc بوده، تمام جایگشت‌های c,b,a,a,a جمله‌ی a^3bc تولید می‌کند و ضریب جمله در واقع تعداد دفعاتی است که یک جمله تولید می‌شود. (چون به همان تعداد این جمله با خودش جمع می‌شود.)

$\frac{5!}{3!}\times a^3bc \leftarrow aaabc=a^3bc$

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n y^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\dots+\binom{n}{n}x^0y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

نتایج: با قرار دادن $x=y=1$ و $x=-y=1$ نتایج مفید زیر به‌دست می‌آید:

$$1)\ x=y=1\Rightarrow\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2)\ x=-y=1\Rightarrow\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots=0\Rightarrow\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

یعنی تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی یک مجموعه با هم برابر است.

مثال: اگر $\binom{n}{10}=\binom{n}{11}$ حاصل $\binom{n}{19}$ کدامست؟

حل:

$$\rightarrow n=10+11\rightarrow\binom{21}{19}=\frac{21\times20}{2}=210$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

الف) $$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\binom{8}{3}+\binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}+\binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}+\binom{10}{6}}_{\binom{11}{6}}+\binom{11}{7}}_{\binom{12}{7}}=$$

ب) $$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=$$

ابتدا به‌جای $\binom{2}{2}$، $\binom{3}{3}$ را جایگزین کرده و سپس متوالیاً از قاعده‌ی پاسکال بهره می‌گیریم.

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\dots\binom{20}{3}+\binom{20}{2}=\binom{21}{3}$$