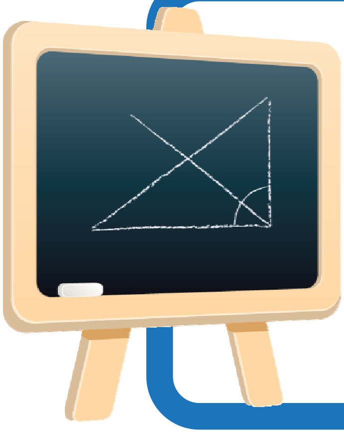
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



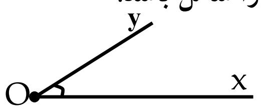
هندسه ۱

- فصل‌های ۱ و ۲

زاویه، مثلث

زاویه:

زاویه، جزئی از صفحه است که دو نیم خط با مبدأ مشترک و مجموعه‌ی نقاط محدود به دو نیم خط مزبور را شامل باشد.



هر یک از دو نیم خط Oy, Ox را یک "ضلع" و نقطه O، مبدأ مشترک آن‌ها، «رأس زاویه» نام دارد.

زاویه را با واحدهای مختلف مانند درجه، گراد و رادیان نمایش می‌دهند که رابطه‌ی زیر را با هم دارند:

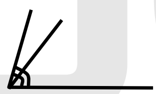
$$\frac{deg}{۱۸۰} = \frac{grad}{۲۰۰} = \frac{rad}{\pi}$$

تعاریف:

☆ دو زاویه را متمم یکدیگر گویند، هرگـاه مجموع اندازه‌های آن‌ها ۹۰° باشد.

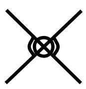
☆ دو زاویه را مکمّل یکدیگر گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آن‌ها ۱۸۰° باشد.

☆ دو زاویه را که در رأس و یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع غیرمشترک آن‌ها در طرفین ضلع مشترک واقع باشد، مجاور می‌نامیم.



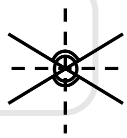
☆ خطی که از رأس زاویه گذشته و زاویه را نصف کند نیمساز زاویه نامیده می‌شود.

☆ دو زاویـه را کـه رأس مشترک داشتـه باشند و اضلاع آن‌ها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، متقابل به رأس نامند.

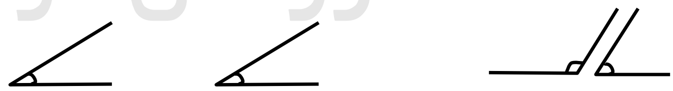


قضایا و خواص:

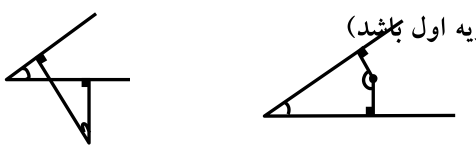
۱- دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند و نیمسازهایشان بر یک خط مستقیم قرار دارند.



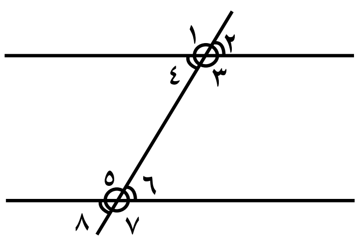
۲- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر با یکدیگر موازی باشند، دو زاویه یا مساوی یکدیگر هستند یا مکمل یکدیگر.



۳- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر بر یکدیگر عمود باشند، دو زاویه مساوی (اگر رأس زاویه‌ی دوم خارج از زاویه‌ی اول یـا روی یکی از اضلاع آن باشد) و یا مکمل هستند. (اگر رأس زاویه دوم داخل زاویه اول باشد)



۴- اگر دو خط موازی توسط یک خط مورب قطع شوند، ۸ زاویه پدید می‌آید که یا مساوی و یا مکمل یکدیگر می‌باشند.



$$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$$

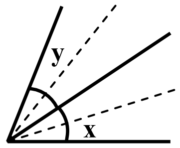
$$\hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸}$$

$$\hat{۴} + \hat{۵} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{۳} + \hat{۶} = ۱۸۰^\circ$$

مثال: تفاضل دو زاویه مجاور ۱۰ درجه است. اگر زاویه بین نیمسازهای آن‌ها $\frac{3}{4}$ زاویه بزرگتر باشد، اندازه زاویه کوچکتر را بیابید.

حل: اگر زاویه‌ی بزرگ‌تر را x و زاویه کوچک‌تر را y فرض کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} x-y=10 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{3}{4}x \to x+y=\frac{3}{2}x \to \frac{x}{2}-y=0 \end{array}\right\} \to 2y-y=10 \to y=10$$

مثال: مجموع دو زاویه 75° است. مجموع مکمل‌های آن‌ها چند درجه است؟

حل:

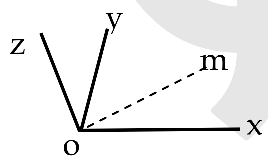
$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=75^\circ$$
$$(180^\circ-\hat{\alpha})+(180^\circ-\hat{\beta})=360^\circ-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=360^\circ-75^\circ=285^\circ$$

مثال: دو زاویه‌ی A و B متمم یکدیگر می‌باشند. اندازه زاویه‌ی A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. اندازه زاویه‌ی A چند درجه است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}=90^\circ \\ \hat{A}=\frac{4}{9}(180^\circ-\hat{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\left(180^\circ-\frac{9}{4}\hat{A}\right)=90^\circ \Rightarrow \frac{5}{4}\hat{A}=90^\circ \Rightarrow \hat{A}=72^\circ$$

مثال: زاویه xoy و نیمساز آن om را در نظر می‌گیریم، نیم خط oz را به دلخواه در خارج زاویه رسم می‌کنیم، زاویه moz برابر کدام است؟



۱) $\frac{x\hat{o}y}{2}$

۲) $\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{2}$

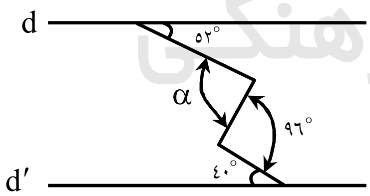
۳) $\frac{x\hat{o}z-y\hat{o}z}{2}$

۴) $\frac{m\hat{o}z+x\hat{o}z}{2}$

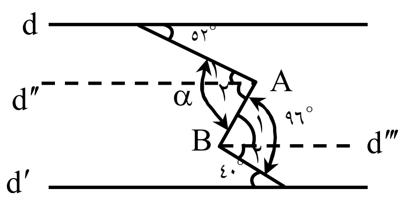
حل:

$$\left.\begin{array}{l} m\hat{o}z=x\hat{o}z-x\hat{o}m \\ m\hat{o}z=y\hat{o}z+y\hat{o}m \end{array}\right\} \xRightarrow{x\hat{o}m=y\hat{o}m} m\hat{o}z=\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{2}$$

مثال: در شکل مقابل دو خط d و d' موازیند. اندازه‌ی زاویه α را بیابید.



حل:



$$\left.\begin{array}{l} d' \parallel d''' \Rightarrow \hat{B}_2=40^\circ \\ d'' \parallel d''' \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}_1=96^\circ-40^\circ=56^\circ \\ d \parallel d'' \Rightarrow \hat{A}_1=52^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=56^\circ+52^\circ=108^\circ$$

مثلث:

اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط مستقیم را دو به دو با سه پاره‌خط به هم وصل کنیم، شکل حاصل را «مثلث» می‌نامند.

الف) تعاریف، قضایا و اصول کلّی، خواص اضلاع و زوایا:

۱- حالات همنهشتی (تساوی) دو مثلث:

قضیه: دو مثلث در حالت‌های زیر با هم همنهشت (مساوی)‌اند:

۱- تساوی دو ضلع و زاویه بین دو ضلع (ض ز ض)
۲- تساوی دو زاویه و ضلع بین دو زاویه (ز ض ز)
۳- تساوی سه ضلع (ض ض ض)
٤- تساوی دو ضلع و زاویه مقابل به ضلع بزرگتر.

حالات همنهشتی مثلثهای خاص:

الف) دو مثلث قائم‌الزاویه در حالات زیر همنهشت‌اند:

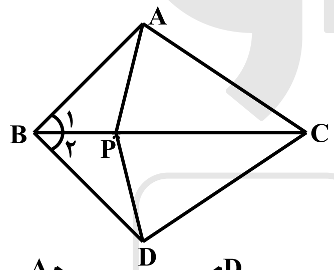
۱- تساوی وتر و یک ضلع (حالت ٤).
۲- تساوی وتر و یک زاویه حاده (حالت ۲).
۳- تساوی دو ضلع زاویه‌ی قائمه (حالت ۱).

ب) دو مثلث متساوی‌الساقین در حالت تساوی یک ضلع و یک زاویه‌ی متناظر همنهشت‌اند.

ج) دو مثلث متساوی‌الاضلاع در حالت تساوی یک ضلع همنهشت‌اند.

☜مثال: اگر P نقطه‌ای دلخواه روی BC باشد، $AC=CD$ و $AB=BD$، ثابت کنید: $AP=PD$

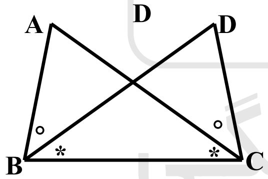
✍حل:



$$\overset{\text{ض ض ض}}{A\overset{\Delta}{B}C=B\overset{\Delta}{C}D} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ AB=BD\\ BP\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} A\overset{\Delta}{B}P=B\overset{\Delta}{P}D \Rightarrow AP=PD$$

☜مثال: در شکل مقابل ثابت کنید: $AB=CD$

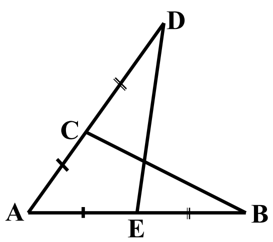
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{C}\\ BC\ \text{مشترک}\\ \hat{B}^*=\hat{C}^*\end{array}\right\} \overset{\text{ز ض ز}}{\Rightarrow} A\overset{\Delta}{B}C=B\overset{\Delta}{C}D \rightarrow AB=CD$$

☜مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $BC=DE$

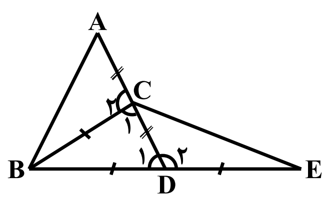
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}AE=AC\\ AD=AB\\ \hat{A}\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} A\overset{\Delta}{B}C=A\overset{\Delta}{D}E \rightarrow DE=BC$$

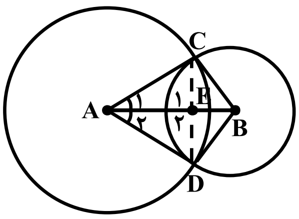
☜مثال: ثابت کنید $AB=CE$ و $\hat{C}=\hat{D}$:

✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}BD=BC \rightarrow \hat{C}_1=\hat{D}_1 \rightarrow \hat{C}_2=\hat{D}_2\\ AC=CD\\ BC=DE\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} A\overset{\Delta}{B}C=C\overset{\Delta}{D}E \rightarrow \begin{cases}AB=CE\\ \hat{C}=\hat{D}\end{cases}$$

☜مثال: دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را در C و D قطع می‌کنند. ثابت کنید:



الف) $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

ب) AB عمود منصف CD است.

✍حل:

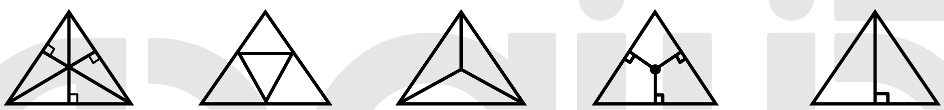
$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ BC = BD \\ AB = AB \end{array}\right\} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{ADB} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AE = AE \\ AC = AD \\ A\hat{C}B = A\hat{D}B \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} = \overset{\Delta}{ADE} \to CE = ED$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = ۹۰^\circ$$

☜مثال: ناحیه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۲، ۳، ٤ و ٦ قسمت همنهشت تقسیم کنید.

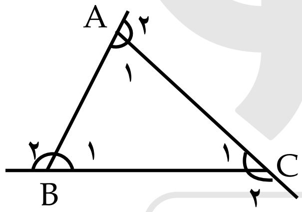
✍حل:

٦ قسمت　　٤ قسمت　　۳ قسمت　　۳ قسمت　　۲ قسمت



۲- روابط زوایای مثلث:

قضیه: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° و مجموع زوایای خارجی آن ۳٦۰° است و هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش برابر است.

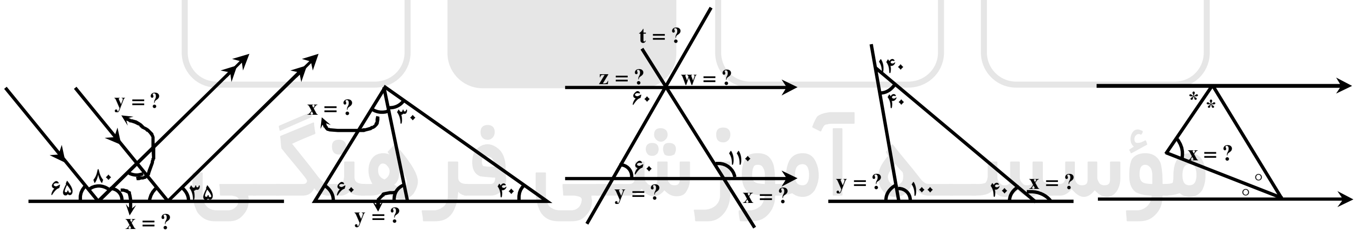


$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = ۱۸۰^\circ$$

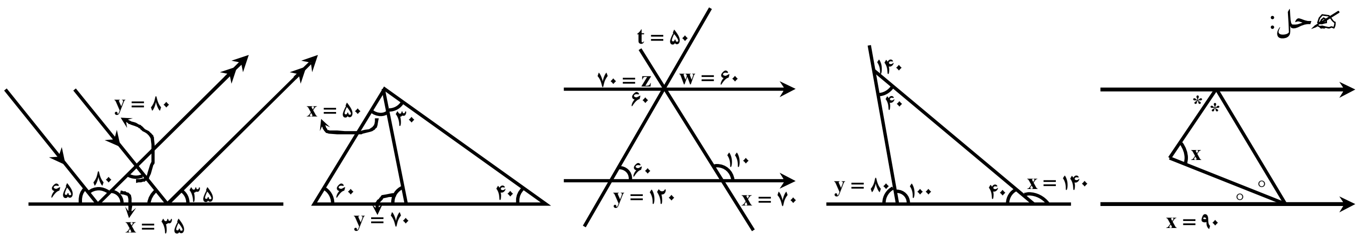
$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = ۳۶۰^\circ$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

☜ مثال: در شکل‌های زیر زوایای مجهول را به‌دست آورید.



✍حل:



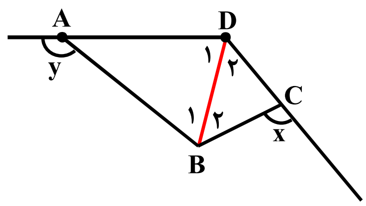
$x = ۹۰$

$۲(*+\circ) = ۱۸۰$

$\Rightarrow x = ۱۸۰ - (*+\circ) = ۹۰$

☜مثال: در شکل زیر ثابت کنید: $\hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$

✍حل:



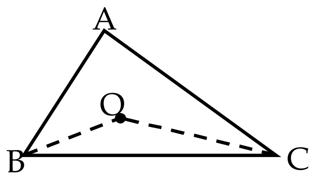
$$\left.\begin{array}{ll} y = \hat{D}_1 + \hat{B}_1 & \text{زاویه خارجی} \\ x = \hat{D}_2 + \hat{B}_2 & \text{زاویه خارجی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$$

☜مثال: زاویه‌های مثلّثی متناسب با اعداد ۸ ، ۵ و ۲ می‌باشند.اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلّث چند درجه است؟

✍حل: وقتی می‌گویند سه عدد با سه عدد دیگر متناسبند، یعنی نسبت تقسیم دوبه‌دوی آن‌ها مقدار یکسانی است:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{z}{۸}=k \to ۲k+۵k+۸k=۱۸۰ \to k=\frac{۱۸۰}{۱۵}=۱۲ \Rightarrow \text{کوچک‌ترین زاویه خارجی}=۲k+۵k=۸۴$$

☜مثال: در داخل مثلث ABC نقطه‌ی دلخواه O را به دو رأس C,B وصل می‌کنیم. اگر $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ باشد کدام رابطه صحیح است؟



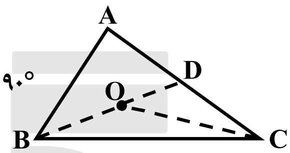
۱) $۳۰^\circ < B\hat{O}C < ۹۰^\circ$

۲) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۵۰^\circ$

۳) $۱۲۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$

٤) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$

✍حل: همواره زاویه‌ی خارجی از هر زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش بزرگ‌تر است.

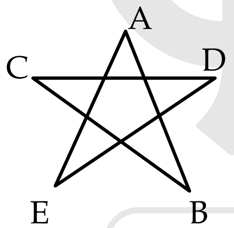


$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱ > \hat{A}\ \text{(زاویه خارجی)}\\ B\hat{O}C > \hat{D}_۱\ \text{(زاویه خارجی)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B\hat{O}C > \hat{A}=۹۰^\circ \\ B\hat{O}C+O\hat{B}C+O\hat{C}B=۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C<۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰^\circ > B\hat{O}C > ۹۰^\circ$$

☜مثال: در شکل مقابل مجموع زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ کدام است؟

✍حل:

روش اول:

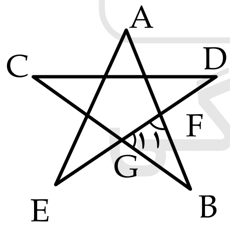


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{G}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{B}+۱۸۰^\circ-\hat{F}+۱۸۰^\circ-\hat{G}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{F}+\hat{G}-۱۸۰^\circ \Rightarrow$$

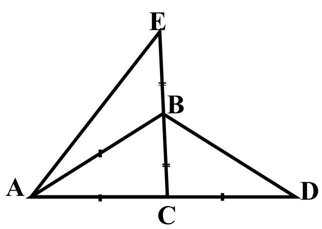
$$\hat{A}+\hat{C}+\left(\hat{B}+۱۸۰^\circ\right)+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$$

روش دوم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{F}_۱=\hat{A}+\hat{E}\\ \hat{G}_۱=\hat{C}+\hat{D}\\ \hat{F}_۱+\hat{G}_۱+\hat{B}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{E}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$

☜مثال: در شکل مقابل زاویه‌ی $B\hat{A}C=۵۲^\circ$، مجموع دو زاویه‌ی D و E چند درجه است؟



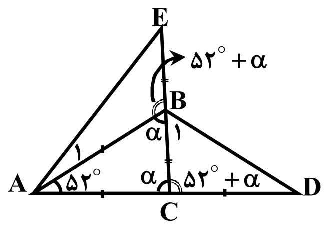
✍حل:

دو مثلث ABE و BCD طبق برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین بـا هـم برابرنـد.

پس $\hat{E}=\hat{B}_۱$ و $\hat{A}_۱=\hat{D}$ می‌باشد. حال داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}=۵۲^\circ \Rightarrow ۲\alpha=۱۸۰^\circ-۵۲^\circ=۱۲۸^\circ \Rightarrow \alpha=۶۴^\circ$$

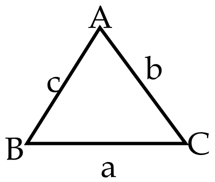
$$\Rightarrow \hat{D}+\hat{E}=\hat{D}+\hat{B}_۱=A\hat{C}B=\alpha=۶۴^\circ$$



۳- روابط طولی در مثلث:

الف) شرط وجود مثلث:

قضیه: در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از قدر مطلق تفاضل آن‌ها بزرگتر است.



$$|a-b|<c<a+b$$
$$|a-c|<b<c+a$$
$$|b-c|<a<b+c$$

پس شرط لازم و کافی برای آن که سه عدد مثبت a، b و c، طول اضلاع یک مثلث باشند، آن است که هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ برقرار باشد. ضمن آن‌که اگر c بزرگترین ضلع مثلث باشد، شرط لازم و کافی برای وجود مثلث آن است که: $c<a+b$

☜مثال: اگر a ، b و c اضلاع مثلث ABC و $a\ge b\ge c$ باشد، آن‌گاه نشان دهید:

$0<(c)$ کوچک‌ترین ضلع مثلث $\le \frac{1}{3}$ (محیط) $\frac{1}{3}$ (محیط) $\le (a)$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث $< \frac{1}{2}$ (محیط)

✍حل:

a بزرگ‌ترین ضلع است: $\left.\begin{matrix}a\ge b\\ a\ge c\end{matrix}\right\}\to 2a\ge b+c\to 3a\ge a+b+c=$ محیط $\to a\ge \frac{1}{3}$ (محیط)

قضیه‌ی وجود مثلث: $a<b+c\to 2a<a+b+c=$ محیط $\to a<\frac{1}{2}$ (محیط)

c کوچک‌ترین ضلع است: $\left.\begin{matrix}0<c\le a\\ 0<c\le b\end{matrix}\right\}\to 0<2c\le a+b\to 0<3c\le a+b+c\to 0<c\le \frac{1}{3}$ (محیط)

☜مثال: سه پاره‌خط به طول‌های $6x$، $x+7$ و $4x-4$ اضلاع یک مثلث هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9}<x<3$ ۲) $\frac{5}{3}<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $\frac{11}{9}<x<4$

✍حل: با نوشتن سه حالت شرط وجود مثلث داریم:

$$\left.\begin{matrix}4x-4<x+7+6x\to 3x>-11\to x>-\frac{11}{3}\\ x+7<6x+4x-4\to 9x>11\to x>\frac{11}{9}\\ 6x<4x-4+x+7\to x<3\end{matrix}\right\}\overset{\cap}{\Rightarrow}\frac{11}{9}<x<3$$

☜مثال: با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ (b,a مثبت‌اند)

۱) $a+b+1,b,a$ ۲) $a+b,b+1,a+1$

۳) $2a^2+3a+1,(a+1)^2,a^2$ ۴) $3a,2a,a-2$

✍حل: باید اعداد در شرط وجود مثلث صدق کنند.

۱) $a+b+1>a+b$ غ ق ق

۲) $a+b<a+b+2$, $2a+b+1>b+1$, $2b+a+1>a+1$ $\Rightarrow$ شرایط وجود مثلث را دارد پس قابل قبول است

۳) $2a^2+3a+1>(a+1)^2+a^2$ غ ق ق

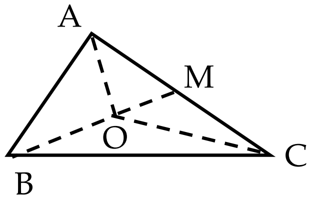
۴) $3a>2a+(a-2)$ غ ق ق

☜مثال: تعداد مثلث‌هایی که اندازه‌های اضلاع آن‌ها سه عدد طبیعی متوالی‌اند، کدام است؟

✍حل: قضیه‌ی وجود مثلث را می‌نویسیم: $n+2<(n+1)+n\to n>1$

برای $n>1$ این نامساوی همواره برقرار است، در نتیجه بی‌شمار جواب داریم.

مثال: در مثلث ABC طول اضلاع برابر ٦، ٨ و ١٢ می‌باشد. اگر BC بزرگترین ضلع مثلث و نقطه‌ی O یک نقطه دلخواه داخل مثلث باشد، در این صورت کمترین و بیشترین مقدار $OB+OC$ کدام است؟

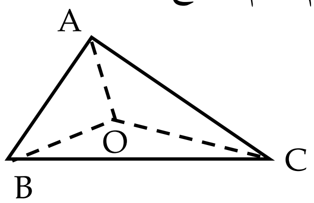


حل: قضیه‌ی وجود مثلث را در مثلث‌های داده شده می‌نویسیم.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AMB: OB+OM < AB+AM\\ \Delta OMC: OC < MC+OM\end{array}\right\} \Rightarrow OB+OC < AB+AM+MC = AB+AC$$

$$BC < OB+OC < AB+AC \Rightarrow ۱۲ < OB+OC < ۱۴$$

مثال: اگر $۲p$ محیط مثلث ABC باشد و O نقطه‌ی دلخواهی واقع در درون مثلث باشد کدام حکم صحیح است؟



۱) $p < OA+OB+OC < ۲p$
۲) $\frac{p}{۲} < OA+OB+OC < p$
۳) $p < OA+OB+OC < \frac{۳p}{۲}$
٤) $\frac{p}{۲} < OA+OB+OC < ۲p$

حل: با نوشتن قضیه‌ی وجود مثلث در مثلث‌های ایجاد شده داریم:

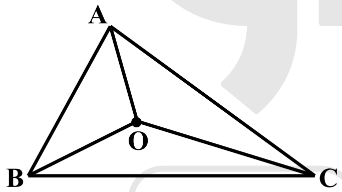
$$\left.\begin{array}{l}BC < OB+OC < AB+AC\\ AB < OA+OB < AC+BC\\ AC < OA+OC < AB+BC\end{array}\right\} \Rightarrow AC+AB+BC < ۲(OA+OB+OC) < ۲(AB+BC+AC) \Rightarrow$$

$$۲p < ۲(OA+OB+OC) < ۴p \Rightarrow p < OA+OB+OC < ۲p$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۳، $۲\sqrt{۲}-۳$ و $۲\sqrt{۲}+۲$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟

۱) $۵-\sqrt{۲}$
۲) ۴
۳) $۴\sqrt{۲}$
٤) ۸

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



در هر مثلث دلخواه طبق حل سوال فوق داریم: $\frac{۱}{۲}(\text{محیط}) < OA+OB+OC < (\text{محیط})$

در این سوال: $\frac{۱}{۲}\left(۸+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\right) < OA+OB+OC < \left(۸+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\right)$

$۴ < OA+OB+OC < ۸$

پس تنها جواب قابل قبول $۴\sqrt{۲}$ است که بین ٤ و ٨ قرار دارد.

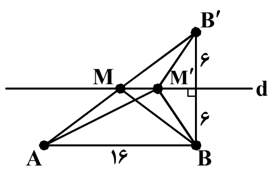
مثال: از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB=۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان، ٤٨ واحد مربع باشد، کم‌ترین مقدار محیط، کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ٣٤
۳) ٣٦
٤) ٣٨

حل:

$$S=\frac{AB\times h}{۲} \Rightarrow \frac{۱۶h}{۲}=۴۸ \Rightarrow h=۶$$

پس در تمامی این مثلث‌ها ارتفاع وارد بر AB، ٦ است. لذا مکان رأس C، ۲ خط موازی AB و به‌فاصله‌ی ٦ از آن است.



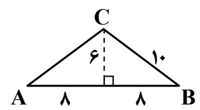
نقطه‌ی B را نسبت به خط d قرینه می‌کنیم.

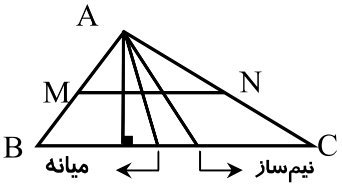
بنابر قضیه‌ی حمار: $AM'+M'B' > AB'$ است.

پس: $AM'+M'B' > AM+MB'$

به‌جهت ایزومتری بودن تقارن $\left\{\begin{array}{l}M'B=M'B'\\ MB'=MB\end{array}\right.$ می‌باشد. لذا با جایگذاری داریم: $AM'+M'B > AM+MB$

پس اگر M محل تلاقی AB' با d باشد، محیط کم‌ترین مقدار است. چون A و B از d به یک فاصله‌اند، پس M روی عمودمنصف AB قرار خواهد گرفت یعنی مثلث باید متساوی‌الساقین باشد. $\Rightarrow CB+CA+AB=۱۰+۱۰+۱۶=۳۶$





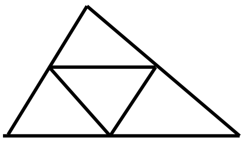
ب) قضیه پاره‌خط واصل بین وسط دو ضلع مثلث:

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

$$MN \parallel BC \quad , \quad MN = \frac{۱}{۲}BC$$

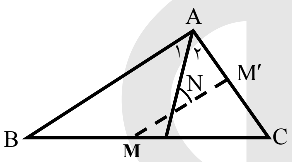
این پاره‌خط ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس A را نیز نصف می‌کند. به‌طور کلی پاره‌خط MN، مکان هندسی وسط‌های کلیه پاره‌خط‌هایی است که یک سر آن نقطه A و سر دیگر آن روی پاره‌خط BC است.

قضیه‌ی عکس: اگر از وسط ضلع مثلثی خطی موازی ضلعی دیگر رسم کنیم، ضلع سوم را نصف می‌کند و اندازه پاره‌خط حاصل نصف ضلع موازی آن خواهد بود.



نکته: با وصل کردن اوساط اضلاع هر مثلث به هم، مثلث به چهار مثلث همنهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) افراز می‌شود.

☜مثال: در مثلث ABC اگر $AB = ۱۲$ و $AC = ۸$ و از نقطه M وسط ضلع BC خطی موازی با AB رسم کنیم تا نیمساز داخلی زاویه A را در نقطه N قطع کند اندازه MN کدام است؟

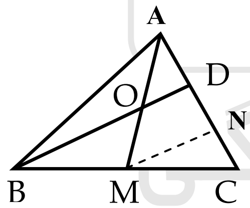


✍حل: چون M وسط BC است، پس M' نیز وسط AC می‌باشد، لذا:

$$MM' = \frac{۱}{۲}AB = ۶$$
$$MM' \parallel AB \Rightarrow N = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$
$$\Rightarrow AM' = NM' = ۴ \Rightarrow MN = ۶ - ۴ = ۲$$

☜مثال: در مثلث ABC، AM میانه وارد بر BC و نقطه O وسط AM است. اگر امتداد OB ضلع AC را در D قطع کند و $OB = ۶$ باشد، OD برابر با کدام است؟

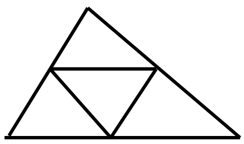
✍حل: با استفاده از قضیه‌ی گفته شده اگر از M خطی به موازات BD رسم کنیم ، خواهیم داشت:



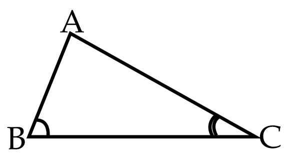
$$\left.\begin{aligned} M \text{ وسط } &\rightarrow MN = \frac{۱}{۲}BD \\ O \text{ وسط } &\rightarrow OD = \frac{۱}{۲}MN \end{aligned}\right\} \rightarrow OD = \frac{۱}{۴}BD \rightarrow OD = \frac{۱}{۳}BO = \frac{۱}{۳}\times ۶ = ۲$$

☜مثال: یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

✍حل: با توجه به این‌که اضلاع مثلث جدید نصف اضلاع مثلث اولیه‌اند، لذا: چون اضلاع نصف شده‌اند محیط اولیه ۲ برابر محیط ثانویه است.



۴- روابط بین اضلاع وزوایا:



الف) قضیه تناظر اضلاع با زوایا: در هر مثلث، زاویه بزرگتر متناظر به ضلع بزرگتر است و بالعکس:

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

مثال: اگر BC بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد، برای زاویه $\hat{A}$ کدام حکم همواره درست است؟

۱) منفرجه است. ۲) حاده است. ۳) قائمه است. ۴) بزرگتر از 60° است.

حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر اضلاع با زوایا:

$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$
$$\Rightarrow 2\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow 3\hat{A} > 180^\circ \Rightarrow \hat{A} > 60^\circ$$
$$BC > AC \Rightarrow \hat{A} > \hat{B}$$

مثال: اگر یکی از زوایای مثلث با اضلاع غیر مساوی، برابر 60° باشد ضلع مقابل به آن زاویه:

۱) کوچکترین ضلع مثلث است. ۲) بزرگترین ضلع مثلث است.

۳) ضلع متوسط مثلث است. ۴) با این اطلاعات قابل تعیین نیست.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = 60^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$$

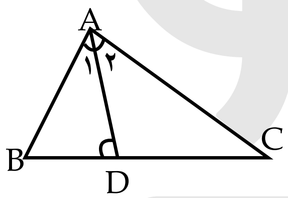
با توجه به صورت سؤال $\hat{B} \neq \hat{C}$. پس یکی از این دو زاویه بزرگتر از 60° و دیگری کوچکتر از 60° است.

فرض می‌کنیم $\hat{C} < 60^\circ, \hat{B} > 60^\circ$ پس $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B} \Rightarrow c < a < b$ پس ضلع روبرو به زاویه‌ی 60° ضلع متوسط این مثلث است.

مثال: در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی زیر همواره درست است؟

۱) $AB > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ۴) $DB > DA$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



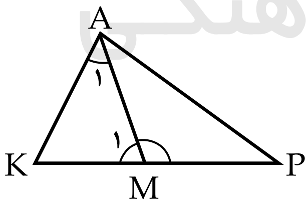
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D} = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} > \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} > \hat{A}_1 \Rightarrow AB > BD$$

مثال: در مثلث PAK نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $AM = AK$، کدام همواره درست است؟

۱) $AM > PM$ ۲) $AK > MK$

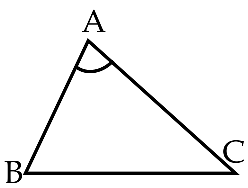
۳) $AP > MK$ ۴) $AP > AK$

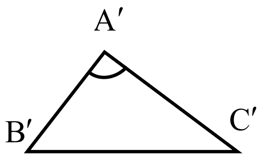
حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه خارجی } \hat{M}_1 > \hat{P} \\ AM = AK \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{K}\end{array}\right\} \rightarrow K > P \rightarrow AP > AK$$

ب) قضیه لولا یا قیچی: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، و زاویه‌ی بین این دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آن‌گاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است. و اگر کوچکتر باشد، ضلع سوم کوچکتر است.

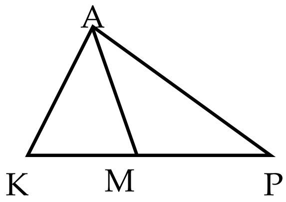




عکس قضیه لولا: عکس قضیه فوق نیز برقرار است: اگر $B'C' > BC$ و دو ضلع دیگر مثلث برابر باشند، آن‌گاه $\hat{A}' > \hat{A}$.

$$\hat{A}' > \hat{A} \Leftrightarrow B'C' > BC$$

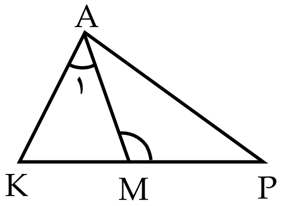
☜مثال: در مثلث PAK نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $PM = AK$، کدام همواره درست است؟



۱) $AM > PM$ ۲) $AK > MK$

۳) $AP > MK$ ۴) $AP > PK$

✍حل:



$$\left.\begin{matrix} MP = AK \\ AM = AM \\ M > A_۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه لولا}} AP > MK$$

ب) مساحت مثلث:

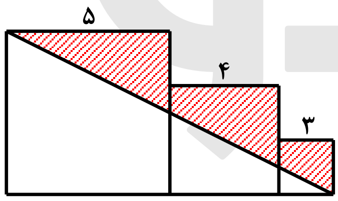
مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}ah_a = \frac{۱}{۲}bh_b = \frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}bc\sin A = \frac{۱}{۲}ac\sin B = \frac{۱}{۲}ab\sin C$$

نتیجه: بین مثلث‌هایی که دو ضلع ثابت دارند، مساحت مثلثی ماکزیمم است که قائم‌الزاویه باشد.

قضیه هرون: اگر p نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه روبه‌رو محاسبه می‌گردد: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

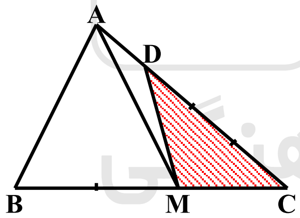
☜مثال: در شکل زیر ۳ مربع به اضلاع ۳، ٤ و ۵ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟



✍حل:

$$S = (۲۵ + ۱۶ + ۹) - (\frac{۱۲ \times ۵}{۲}) = ۲۰$$

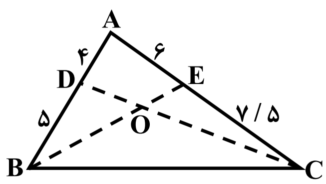
☜مثال: اگر $BM = ۲MC$ و $DC = ۳AD$ حاصل $\frac{S_{MDC}}{S_{ABC}}$ چقدر است ؟



✍حل:

$$\left.\begin{matrix} \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{S_{MCD}}{S_{AMC}} = \frac{۳}{۴} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{S_{MCD}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۴}$$

☜مثال: در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت OCE کدام است؟

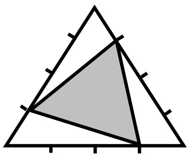


✍حل: بنا بر عکس قضیه‌ی تالس چون $\frac{۶}{۷/۵} = \frac{۴}{۵}$ است پس $DE \parallel BC$ است.

چون دو مثلث $\overset{\triangle}{DBC}$ و $\overset{\triangle}{BEC}$ دارای قاعده‌های برابر و ارتفاع‌های برابرند با حذف مثلث مشترک $\overset{\triangle}{BOC}$ خواهیم داشت:

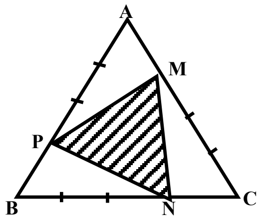
$$S_{\underset{DBC}{\triangle}} = S_{\underset{EBC}{\triangle}} \Rightarrow S_{\underset{OBD}{\triangle}} = S_{\underset{OCE}{\triangle}} \Rightarrow \frac{S_{\underset{OBD}{\triangle}}}{S_{\underset{OCE}{\triangle}}} = ۱$$

☜مثال: هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع زیر، به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



✍حل:

چون اضلاع مثلث به نسبت‌های یکسان تقسیم شده‌اند. مثلث هاشور خورده هم متساوی الاضلاع است که البته این موضوع با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها نیز قابل تحقیق است.

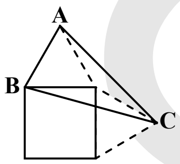


$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times a\times \sin ۶۰=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{MCN}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}a\times\frac{۱}{۴}a\times\sin ۶۰=\frac{۳}{۱۶}S_{ABC}$$

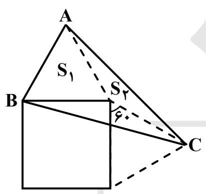
$$\to S_{MNP}=S_{ABC}-۳S_{MCN}=(۱-۳\times\frac{۳}{۱۶})S_{ABC}=\frac{۷}{۱۶}S_{ABC}$$

☜مثال: در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ٤) ٤

حل:



$$S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۱۵۰^\circ=۱ \qquad S_۱=\frac{۲^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=S_۱+۲S_۲=\sqrt{۳}+۲$$

☜مثال: در مثلثی به اضلاع ۵، ٦ و ۷، طول ارتفاع وارد بر ضلع به طول ٦ کدام است؟

✍حل: $۲p=۱۸\Rightarrow p=۹$

با استفاده از فرمول هرون:

$$s=\sqrt{۹(۹-۵)(۹-۶)(۹-۷)}=\sqrt{۹\times ۴\times ۳\times ۲}=۶\sqrt{۶}$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۶\times h=۶\sqrt{۶}\Rightarrow h=۲\sqrt{۶}$$

☜مثال: اگر یک راس مثلثی مرکز دایره‌ای به شعاع ٦ و دو راس دیگرش روی این دایره باشند، بیشترین مساحت این مثلث کدام است؟

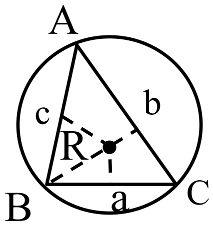
✍حل:

$$S=\frac{۱}{۲}R\times R\sin\theta=\frac{۱}{۲}۶\times ۶\sin\theta=۱۸\sin\theta$$

ماکزیمم مساحت هنگامی است که $\sin\theta=۱$ باشد پس $S_{max}=۱۸$

ج) قضیه‌ی سینوس‌ها و کسینوس‌ها:

دو رابطه بسیار مهم زیر در مثلث برقرارند:



رابطه سینوس‌ها   شعاع دایره محیطی: R

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

رابطه کسینوس‌ها

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B} \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

مثال: در مثلثی داریم $a \neq b = c$ و $a = 6$. اگر شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث $2\sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی b کدام است؟

حل: با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها:

$$\frac{a}{\sin A}=2R=4\sqrt{3}\Rightarrow\frac{6}{\sin A}=4\sqrt{3}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\hat{A}=60^\circ\Rightarrow$ چون $a=b$ می‌شود غیر قابل قبول است

یا

$$\hat{A}=120^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=30^\circ\Rightarrow\frac{b}{\text{Sin }B}=2R\Rightarrow b=4\sqrt{3}\text{Sin }30^\circ=2\sqrt{3}$$

مثال: اگر در مثلثی رابطه‌ی $b^3+c^3=a^2(b+c)$ برقرار باشد، مقدار زاویه‌ی $\hat{A}$ کدام است؟

حل:

$$b^3+c^3=a^2(b+c)\Rightarrow a^2=\frac{(b^2+c^2-bc)(b+c)}{(b+c)}=b^2+c^2-bc$$

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی گفته شده:

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-bc \\ a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A \end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cos A=1\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{A}=60^\circ$$

د) قضیه‌ی فیثاغورس:

در هر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

قضیه فیثاغورس:

$$\hat{A}>90\Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$$
$$\hat{A}=90\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$$
$$\hat{A}<90\Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$$

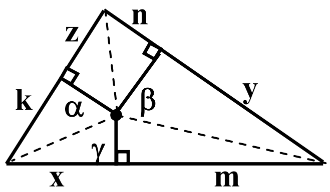
که مورد اول و سوم هم بر اساس قضیه‌ی کسینوس‌ها و هم بر اساس قضیه‌ی لولا قابل اثبات است .

نکته: اعداد فیثاغورسی معروف عبارتند از:

$(3,4,5)$ – $(5,12,13)$ – $(7,24,25)$ – $(8,15,17)$ – $(9,40,41)$ – $(12,35,37)$ – $(20,21,29)$

☜مثال: اگر از یک نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث، سه عمود بر اضلاع رسم کنیم. نشان دهید بین قطعات حاصل رابطه زیر برقرار است:

$$x^2+y^2+z^2=m^2+n^2+k^2$$



✍حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که وترشان مشترک است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+z^2=\beta^2+n^2\\ \alpha^2+k^2=x^2+\gamma^2\\ \beta^2+y^2=\gamma^2+m^2\end{array}\right\}\rightarrow m^2+n^2+k^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=x^2+y^2+z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$\rightarrow x^2+y^2+z^2=m^2+n^2+k^2$$

☜مثال: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ اگر $b=5$، $c=12$ و $\hat{A}<90^\circ$ باشد، برای ضلع a کدام گزاره درست است؟

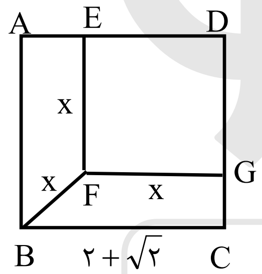
۱) $13<a<17$ ۲) $7<a<13$ ۳) $7<a<17$ ۴) $a<13$

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}A<90\Rightarrow a^2<b^2+c^2\Rightarrow a^2<169\Rightarrow a<13\\ |b-c|<a<b+c\Rightarrow 7<a<17\end{array}\right\}\Rightarrow 7<a<13$$

☜مثال: در شکل زیر ABCD و EFGD مربع هستند. مساحت مربع EFGD را بیابید.

✍حل: اگر قطر مربع ABCD را یک‌بار بر اساس قطر مربع EDGF و بار دیگر با توجه به ضلع بنویسیم، خواهیم داشت:



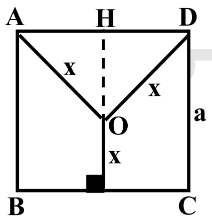
$$x+x\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2$$

$$x(1+\sqrt{2})=2(\sqrt{2}+1)\rightarrow x=2$$

$$\rightarrow S_{EFDG}=x^2=4$$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ساق a، وتر $a\sqrt{2}$ است.

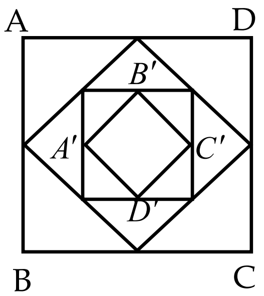
☜مثال: در شکل مقابل **ABCD** مربع به ضلع **a** است. $\frac{x}{a}$ را بیابید.



✍حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AOH، داریم:

$$(a-x)^2+(\frac{a}{2})^2=x^2\rightarrow x^2+a^2-2ax+\frac{a^2}{4}=x^2\rightarrow 2ax=\frac{5a^2}{4}\rightarrow x=\frac{5a}{8}\rightarrow \frac{x}{a}=\frac{5}{8}$$

☜مثال: در شکل زیر رأس‌های هر مربع اوساط اضلاع مربع دیگر است. اگر طول ضلع مربع **ABCD** برابر با ۸ باشد، طول ضلع مربع $A'B'C'D'$ را بیابید.



✍حل: چون وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی به ساق a، $a\sqrt{2}$ است، لذا چون ضلع نصف می‌شود ضلع مربع جدید $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر ضلع مربع قبلی است.

$$\rightarrow 8\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=8(\frac{2\sqrt{2}}{8})=2\sqrt{2}$$

مثال: اگر در مثلثی رابطه $a^n = b^n + c^n$ برقرار باشد، $(n > ۲)$ آن‌گاه کدام صحیح است؟

۱) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ ۲) $۶۰^\circ < \hat{A} < ۹۰^\circ$ ۳) $\hat{A} < ۶۰^\circ$ ٤) $\hat{A} < ٤٥^\circ$

حل:

$$a^n = b^n + c^n \to a^n > b^n \to a > b \to \frac{b}{a} < ۱$$

$$a^n > c^n \to a > c \to \frac{c}{a} < ۱$$

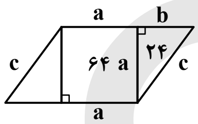
چون a بزرگ‌ترین ضلع است و قبلاً گفتیم، زاویه‌ی مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث حتماً بزرگ‌تر از ۶۰° است، پس $\hat{A} > ۶۰^\circ$

$$a^۲ a^{n-۲} = b^۲ b^{n-۲} + c^۲ c^{n-۲} \to a^۲ = b^۲ (\frac{b}{a})^{n-۲} + c^۲ (\frac{c}{a})^{n-۲} < b^۲ + c^۲ \to \hat{A} < ۹۰^\circ$$

مثال: یک متوازی‌الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت مربع و یک مثلث قائم‌الزاویه به‌ترتیب ٦٤ و ٢٤ واحد مربع باشند، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳٦ ۳) ٤٨ ٤) ٥٤

حل:



$$a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = ۸$$

$$\frac{ba}{۲} = ۲۴ \Rightarrow ab = ۴۸ \Rightarrow b = ۶$$

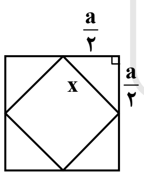
$$c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = ۲(a+b+c) = ۲(۱۰+۶+۸) = ۴۸$$

مثال: در مربعی به ضلع a، کوچک‌ترین مربع ممکن را به طریقی محاط می‌کنیم که هر رأس مربع بر روی ضلع مربع اصلی قرار گیرد. نسبت ضلع این مربع به ضلع مربع اصلی کدام است؟

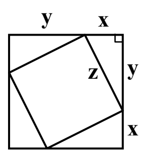
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ٤) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل:



برای آن‌که ضلع مربع کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، باید رأس مربع کوچک‌تر وسط ضلع مربع بزرگ‌تر قرار گیرد که در این صورت: $x = \frac{a}{۲}\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

اثبات: $\begin{cases} z^۲ = x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲ - ۲xy = a^۲ - ۲xy \\ x + y = a \end{cases}$

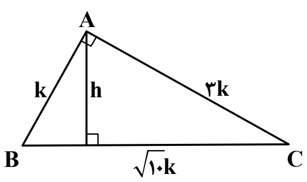


چون جمع دو متغیر مقدار ثابتی است، ضرب آن‌ها زمانی ماکسیمم است که با هم برابر باشند (که در این صورت z مینیمم می‌شود). $\Rightarrow x = y = \frac{a}{۲}$

مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت ٦۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ٥ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ٦ ٤) ٨

حل:



$$S_{ABC} = \frac{k \times ۳k}{۲} = ۶۰ \Rightarrow k^۲ = ۴۰ \Rightarrow k = ۲\sqrt{۱۰}$$

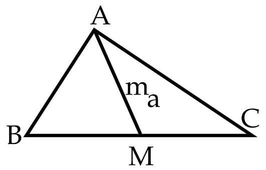
$$h \times \sqrt{۱۰} k = k \times ۳k \Rightarrow h = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} k = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \times ۲\sqrt{۱۰} = ۶$$

۵) اجزای دیگر مثلث:

۱) میانه:

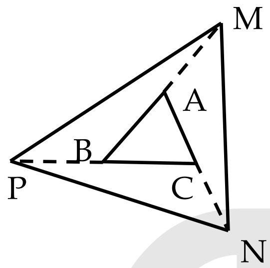
پاره‌خطی که یک سر آن رأس مثلث و سر دیگرش وسط ضلع مقابل آن رأس باشد، میانه‌ی نظیر آن رأس از مثلث نامیده می‌شود.

نکات:



۱- هر میانه‌ی مثلث مساحت آن را نصف می‌کند.یا به تعبیر دیگر، میانه مثلث را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.

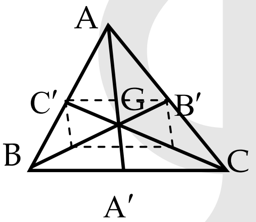
مثال: هر یک از اضلاع مثلث **ABC** را به اندازه‌ی خودش در یک جهت امتداد می‌دهیم تا مثلث **MNP** حاصل شود. مساحت مثلث **MNP** چند برابر مساحت مثلث **ABC** است؟



حل: اگر از C به M و از B به N و از A به P وصل کنیم، این خطوط در مثلث‌هایی که قرار دارند میانه‌اند، لذا مساحت را نصف می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases} S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACM} = S_{\Delta MCN} \\ S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABP} = S_{\Delta MAP} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = ۷S_{\Delta ABC} \\ S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCN} = S_{\Delta PBN} \end{cases}$$

۲- سه میانه‌ی مثلث از یک نقطه می‌گذرند (همرسند) و در آن نقطه یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند. این نقطه مرکز ثقل مثلث نیز می‌باشد.

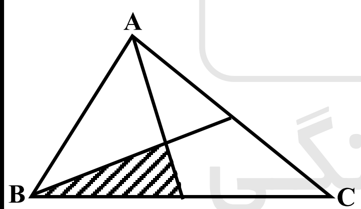


$$\boxed{\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = \frac{۱}{۲}}$$

مثال: اگر دو میانه مثلثی $m_a = ۹$ و $m_b = ۱۲$ باشد ، اندازه‌ی ضلع **a** کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲

حل: گزینه ۳ پاسخ است .

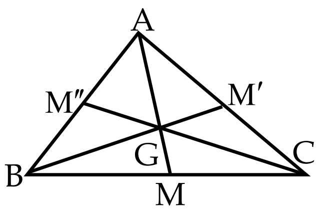


چون میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند $\frac{۲}{۳}m_b$، $\frac{۱}{۳}m_a$ و $\frac{a}{۲}$ خود یک مثلث می‌سازند که باید در شرایط قضیه وجود مثلث صدق کنند.

پس داریم:

$$|۸-۳| < \frac{a}{۲} < ۸+۳ \to ۱۰ < a < ۲۲$$

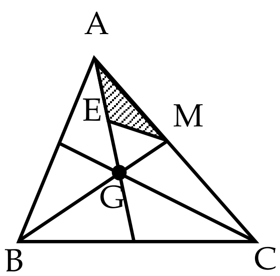
۳- سه میانه‌ی هر مثلث، آن مثلث را به شش مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کنند.



$$S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GAC} = S_{\Delta AGB} = \frac{۱}{۳}S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta AGM'} = S_{\Delta GM'C} = S_{\Delta GCM} = S_{\Delta MGB} = S_{\Delta BGM''} = S_{\Delta M''GA} = \frac{۱}{۶}S_{\Delta ABC}$$

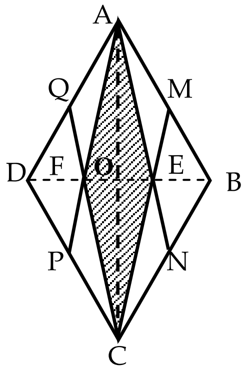
مثال: در مثلث ABC نقطه G مرکز ثقل و نقطه E وسط AG می‌باشد. مساحت مثلث AME چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



حل: در مثلث **AGM**، **EM** میانه است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta AME} = \frac{۱}{۲}S_{\Delta AGM} \\ \text{ABC مرکز ثقل مثلث } G \Rightarrow S_{\Delta AGM} = \frac{۱}{۶}S_{\Delta ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta AME} = \frac{۱}{۱۲}S_{\Delta ABC}$$

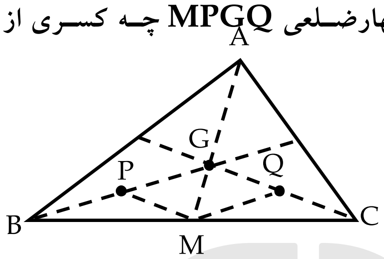
☜مثال: در چهار ضلعی ABCD ، M، N، P و Q وسطهای اضلاع می باشند. مساحت چهارضلعی AFCE چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟



✍حل: اگر قطرAC را رسم کنیم، دو مثلث تشکیل می‌شود که CM، AN، CQ و AP میانه‌های آن هستند، لذا با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta AEC}=\frac{۱}{۳}S_{\Delta ACB} \\ S_{\Delta AFC}=\frac{۱}{۳}S_{\Delta ADC}\end{array}\right\} \Rightarrow S_{AFCE}=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

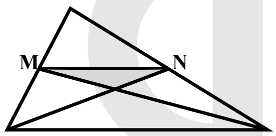
☜مثال: در شکل مقابل G مرکز مثلث، P وسط BG و Q وسط CG است. مساحت چهارضلعی MPGQ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



✍حل:

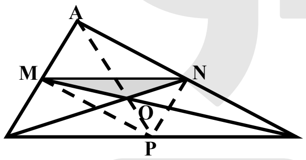
$$S_{PGQM}=S_{PGM}+S_{GQM}=\frac{S}{۱۲}+\frac{S}{۱۲}=\frac{S}{۶}$$

☜مثال: در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع هستند. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث سایه‌زده است؟



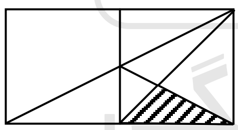
✍حل:

می‌دانیم در هر مثلث با رسم سه میانه، ٦ مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود. هم‌چنین در هر مثلث با وصل کردن وسط اضلاع، ٤ مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم مساحت ایجاد می‌شود.



$$S_{\overset{\Delta}{MNP}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}},\ S_{\overset{\Delta}{MNO}}=\frac{۲}{۶}S_{\overset{\Delta}{MNP}}=\frac{۱}{۱۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

☜مثال: در شکل مقابل، دو مربع مساوی کنار هم قرار دارند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده چند برابر مساحت یک مربع است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۹}$
٤) $\frac{\sqrt{۲}}{۹}$

✍حل:

چون دو خط رسم شده برای مثلث حاصل میانه‌اند، لذا مساحت قسمت هاشور خورده $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث است. مساحت مثلث نصف مجموع مساحت‌های دو مربع است، یعنی با مساحت یکی از مربع‌ها مساوی است. پس مساحت قسمت هاشور خورده $\frac{۱}{۶}$ مساحت یک مربع است.

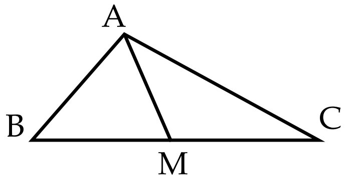
٤- در مثلث ABC اگر AM میانه‌ی نظیر ضلع BC باشد، همواره داریم:

$$\hat{A}<۹۰^\circ \Rightarrow AM>\frac{BC}{۲}$$

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow AM=\frac{BC}{۲}$$ (میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است.)

$$\hat{A}>۹۰^\circ \Rightarrow AM<\frac{BC}{۲}$$

۵- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:



$$m_a^{۲}=\frac{۱}{۲}(b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲}) \quad \text{یا} \quad AB^{۲}+AC^{۲}=۲AM^{۲}+\frac{BC^{۲}}{۲}$$

مثال: طول میانه‌ی AM در مثلثی که اضلاع آن $AB=۲$، $AC=۳$ و $BC=۴$ می‌باشند کدام است؟

حل:
$$AB^{۲}+AC^{۲}=\frac{BC^{۲}}{۲}+۲AM^{۲} \Rightarrow ۲^{۲}+۳^{۳}=\frac{۴^{۲}}{۲}+۲AM^{۲} \Rightarrow AM=\sqrt{\frac{۴+۹-۸}{۲}}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

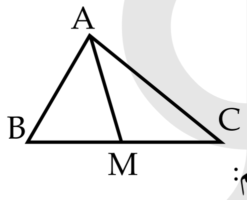
۶- در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور به آن کوچکتر است. اگر m_a اندازه‌ی میانـه‌ی نظیـر رأس A از مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{|b-c|}{۲}<m_a<\frac{b+c}{۲}$$

و می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{۳}{۴}(\text{محیط})<m_a+m_b+m_c<\text{محیط} \quad \text{یا} \quad \frac{۳}{٤}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c$$

مثال: در مثلث ABC اگر طول اضلاع ٦، ۱۰، ١٤ و BC بزرگترین ضلع مثلث باشد، کـدام رابطـه در مـورد میانـه AM صحیح است؟



۱) $۳<AM<۸$ ۲) $٦<AM<۱۰$
۳) $۳<AM<۷$ ٤) $۷<AM<۱۰$

حل: تمام نامساوی‌هایی که در مورد میانه‌ی AM امکان‌پذیر است را نوشته و سپس اشتراک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{|AB-AC|}{۲}<AM<\frac{AB+AC}{۲}\Rightarrow ۲<AM<۸\\ |AB-BM|<AM<AB+BM\Rightarrow ۱<AM<۱۳\\ |AC-CM|<AM<AC+CM\Rightarrow ۳<AM<۱۷\\ ۱۴^{۲}>۱۰^{۲}+۶^{۲}\Rightarrow \hat{A}>۹۰^\circ\Rightarrow AM<\frac{BC}{۲}\Rightarrow AM<\frac{۱۴}{۲}=۷\end{array}\right\}\Rightarrow ۳<AM<۷$$

مثال: در مثلثی به اندازه‌ی اضلاع $a\geq۸$، ۷ و ۵، کدام عدد برای مجموع اندازه‌های سه میانه، مورد قبول است؟

۱) ١٤ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ٤) ٢٤

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا با توجه به نامساوی مثلثی محدوده‌ی a را تعیین می‌کنیم.

$۷-۵<a<۷+۵ \Rightarrow ۲<a<۱۲$ و طبق فرض: $a\geq۸ \Rightarrow ۸\leq a<۱۲$

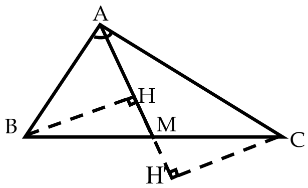
مجموع طول سه میانه‌ی هر مثلث بین محیط و سه چهارم محیط است:

$۸+۵+۷\leq$ محیط $<۱۲+۵+۷ \Rightarrow ۲۰\leq$ محیط <۲۴ ، $\frac{۳}{۴}$ محیط $<m_a+m_b+m_c<$ محیط

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(۲۰)<m_a+m_b+m_c<۲۴ \Rightarrow ۱۵<m_a+m_b+m_c<۲۴$$

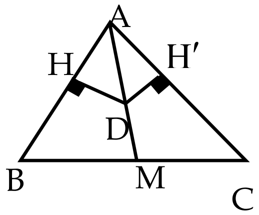
بین گزینه‌ها ۱۹ قابل قبول است.

۷- در هر مثلث، هر میانه از مجموع دو میانه دیگر کوچکتر است. لذا میانه‌های یک مثلث، خود مثلث دیگـری مـی‌سـازند کـه مساحتش $\frac{۳}{٤}$ مساحت مثلث اولیه است. یعنی مساحت مثلثی با ۳ ضلع m_a، m_b و m_c برابر $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث بنا شده بـر a، b و c خواهد بود.



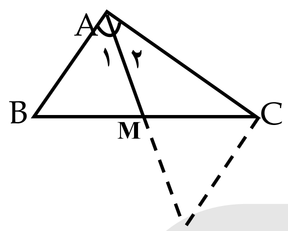
۸- دو رأس هر مثلث، از میانه‌ی نظیر رأس سوم به یک فاصله‌اند و به‌عکس اگر دو رأس مثلث از خطی که از رأس سوم می‌گذرد به یک فاصله باشند، آن خط میانه است. (آن خط نباید با ضلع سوم موازی باشد.)

میانه $AM \Leftrightarrow BH = CH'$



۹- نسبت فاصله‌های هر نقطه‌ی میانه از دو ضلع مجاور آن، برابر است با عکس نسبت آن دو ضلع:

$$\frac{DH}{DH'} = \frac{AC}{AB}$$

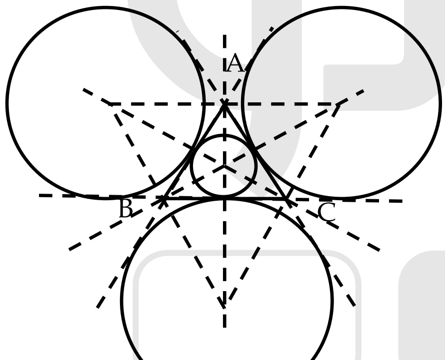


۱۰- میانه‌ی نظیر هر رأس با ضلع بزرگتر آن، زاویه کوچکتری می‌سازد.

$$AC > AB \Rightarrow \hat{A}_۱ > \hat{A}_۲$$

۱۱- در هر مثلث، کوچکترین میانه، نظیر بزرگترین ضلع و بزرگترین میانه، نظیر کوچکترین ضلع است.

۲) نیمساز:



پاره‌خطی که به یک رأس از مثلث و ضلع مقابل آن محدود است و زاویه‌ی آن رأس را نصف می‌کند، نیمساز مثلث نامیده می‌شود. هر مثلث دارای سه نیمساز داخلی و سه نیمساز خارجی است. سه نیمساز داخلی از یک نقطه می‌گذرند که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و لذا می‌توان دایره‌ای بر سه ضلع مثلث مماس کرد که آن نقطه (محل تلاقی ۳ نیمساز داخلی) مرکز آن دایره می‌باشد. این دایره، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث نام دارد.

نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم نیز از یک نقطه می‌گذرند که آن نقطه نیز از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و لذا می‌توان دایره‌ای بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس کرد که آن نقطه (محل تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم) مرکز آن دایره می‌باشد. این دایره، دایره‌ی محاطی خارجی مثلث نام دارد. هر مثلث سه دایره‌ی محاطی خارجی دارد.

☜مثال: سه خط دوبه‌دو متقاطع در یک صفحه مفروضند. چند نقطه در این صفحه می‌توان یافت که از هر سه خط مزبور به یک فاصله باشد؟

✍حل:

سه خط یک مثلث می‌سازند و سه مرکز دایره‌ی محاطی خارجی و یک مرکز دایره محاطی داخلی از سه ضلع به یک فاصله‌اند، پس ٤ نقطه با این خاصیت وجود دارد.

☜مثال: محل تلاقی کدام دسته خط از دسته خط‌های زیر همواره داخل مثلث است؟

۱) میانه‌ها و نیمسازهای داخلی　　　۲) ارتفاع‌ها و میانه‌ها

۳) ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها　　　٤) عمودمنصف‌ها و نیمسازها

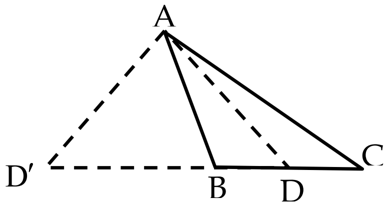
✍حل: تنها میانه‌ها و نیمسازهای داخلی تمام نقاطشان داخل مثلث می‌باشد، لذا محل تلاقیشان نیز داخل مثلث می‌باشد.

نکات:

۱- نیمساز زاویه‌ی داخلی هر رأس مثلث بر نیمساز زاویه‌ی خارجی همان رأس عمود است.

☜مثال: در مثلث ABC، اگر طول نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A برابر باشند، $|\hat{B}-\hat{C}|$ کدام است؟

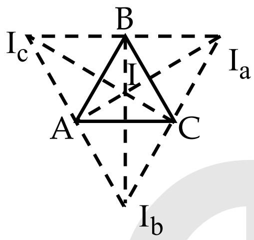
✍حل:



با توجه به نکته‌ی فوق $A=90^\circ$ و داریم $AD'=AD$ در نتیجه $\widehat{D'}=\hat{D}=45^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=180^\circ-45^\circ-\dfrac{\hat{A}}{2}\\[2mm] \hat{C}=45^\circ-\dfrac{\hat{A}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow |\hat{B}-\hat{C}|=90^\circ$$

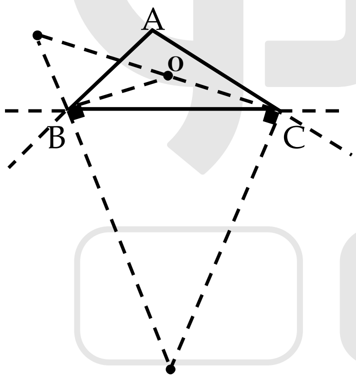
☜مثال: هرگاه I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و I_c، I_b و I_a مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث ABC باشند، در مثلثی که رئوسش I_c، I_b و I_a می‌باشد، I کدام است؟



۱) مرکز ثقل
۲) مرکز دایره‌ی محاطی داخلی
۳) محل تلاقی سه ارتفاع
۴) مرکز دایره‌ی محیطی

✍حل:

چون IC نیمساز داخلی و I_bI_a نیمساز خارجی رأس C است، لذا بر هم عمودند و به دلیل مشابه I_aA و I_bB نیز ارتفاعند و I محل تلاقی ارتفاع‌ها است.

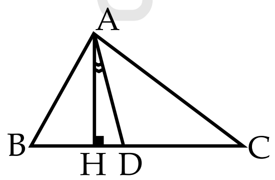


۲- زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی زوایای C,B در مثلث ABC مساوی $90^\circ+\dfrac{\hat{A}}{2}$ است.

۳- زاویه‌ی بین دو نیمساز خارجی زوایای C,B در مثلث ABC مساوی $90^\circ-\dfrac{\hat{A}}{2}$ است.

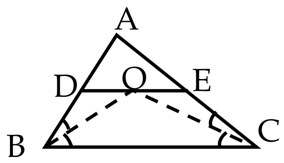
۴- زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی C و نیمساز خارجی زاویه‌ی B در مثلث ABC مساوی $\dfrac{\hat{A}}{2}$ است.

۵- در هر مثلث زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز هر رأس برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل زاویه‌های دو رأس دیگر.



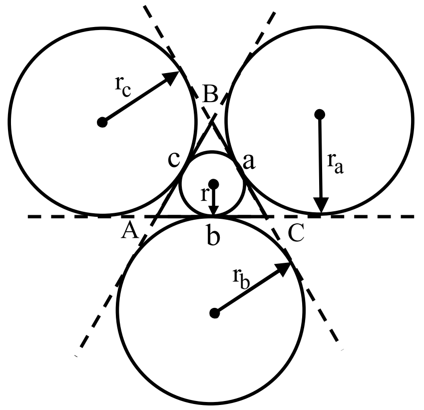
$$\boxed{H\hat{A}D=\frac{1}{2}|\hat{B}-\hat{C}|}$$

۶- هر گاه از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی دو رأس یک مثلث، خطی موازی با ضلع واقع بین آن دو رأس رسم کنیم تا دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند پاره‌خط پدید آمده برابر است با مجموع بخش‌های ایجاد شده روی دو ضلع مثلث که مجاور با دو رأس اولیه هستند.



$$\boxed{DE=DB+EC}$$

۷- اگر r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و r_a، r_b و r_c شعاع دوایر محاطی خارجی مثلث باشد روابط زیر برقرار است:



$$r=\frac{S}{p} \qquad (۲p=a+b+c)$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}$$
$$r_b=\frac{S}{p-b}$$
$$r_c=\frac{S}{p-c}$$
$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$$

☜مثال: اگر ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۸cm باشد، شعاع دایره‌ی محاطی درونی مثلث چند سانتی‌متر است؟

✍حل: با استفاده از رابطه‌ی فوق:

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۱۸ \Rightarrow a=\frac{۳۶}{\sqrt{۳}} \Rightarrow S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{a}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=۶cm$$

☜مثال: مساحت مثلثی ۱۳ برابر محیط آن است. شعاع دایره‌ی محاطی درونی مثلث را بیابید.

✍حل:

$$s=۱۳\times ۲p \Rightarrow s=۲۶p \Rightarrow r=\frac{s}{p}=۲۶$$

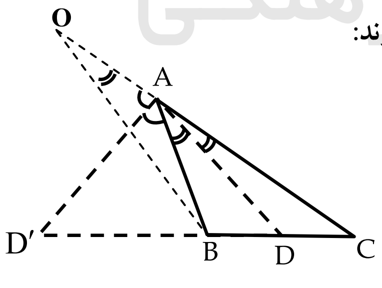
☜مثال: در مثلث ABC، که طول اضلاع عبارتند از $a=۵$، $b=۱۲$ و $c=۱۳$ اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی خارجی مماس بر ضلع BC کدام است؟

✍حل:

$$s=\frac{۱}{۲}\times(۵\times ۱۲)=۳۰$$
$$r_a=\frac{s}{p-a}=\frac{۳۰}{۱۵-۵}=۳$$

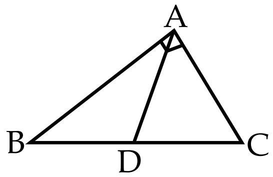
۸- نیمساز داخلی و خارجی نظیر هر زاویه‌ی مثلث، ضلع مقابل آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

همچنین طول نیمساز داخلی و نیمساز خارجی نیز با توجه به روابط زیر محاسبه می‌شوند:



$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{D'B}{D'C}$$
$$AD^۲=AB\times AC-DB\times DC$$
$$AD'^۲=D'B\times D'C-AB\times AC$$

☜مثال: در مثلث ABC می‌دانیم $AB=۶$ و $AC=۴$. اگر نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند و $BD=۳$ باشد، طول BC کدام است؟

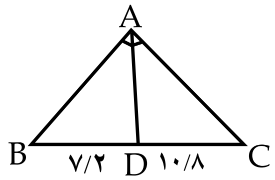


✍حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{۶}{۴} \xRightarrow{BD=۳} DC=۲ \Rightarrow BC=۳+۲=۵$$

مثال: محیط مثلثی ۴۳ و اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز یک زاویه‌ی درونی بر روی ضلع مقابل پدید می‌آورد ۷/۲ و ۱۰/۸ است. اندازه‌ی کوچکترین ضلع مثلث را بیابید.

حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:



$$\left.\begin{array}{l} a = ۷/۲+۱۰/۸ = ۱۸ \Rightarrow b+c = ۴۳-۱۸ = ۲۵ \\ \frac{b}{c} = \frac{۱۰/۸}{۷/۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{۲}c + c = ۲۵ \Rightarrow c = ۱۰$$

مثال: اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه‌ی A برابر حاصل‌ضرب اضلاع آن زاویه است، استنباط چگونه است؟

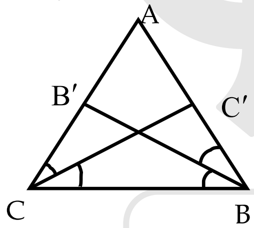
۱) $A < ۹۰^\circ$ ۲) $A = ۹۰^\circ$ ۳) $A > ۹۰^\circ$ ۴) نادرستی فرض

حل: اگر رابطه‌ی بین طول نیمساز با طول اضلاع و قطعاتی که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را بنویسیم، داریم:

$$AD^۲ = AB\times AC - BD\times DC = AB\times AC \to BD\times DC = ۰!$$

که امکان‌پذیر نمی‌باشد.

مثال: در مثلث ABC، AB>BC>AC و محیط ۴۳ است. اگر نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ضلع مقابل را به نسبت $\frac{۶}{۵}$ و $\frac{۲}{۳}$ تقسیم کرده باشند، اندازه‌ی BC کدام است؟

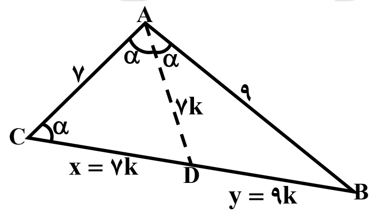


حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BB' : \frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{۶}{۵} \to BC = \frac{۵}{۶}AB \\ CC' : \frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} = \frac{۲}{۳} \to BC = \frac{۳}{۲}AC \end{array}\right\} \to AB+BC+AC = ۴۳ \to \frac{۶}{۵}BC + \frac{۲}{۳}BC + BC = ۴۳ \to BC = ۱۵$$

مثال: در مثلث ABC داریم: $AB = ۹$ ، $AC = ۷$ و $\hat{A} = ۲\hat{C}$. اندازه‌ی BC را بیابید.

حل:



اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به‌ترتیب x و y باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x = ۷k$ و $y = ۹k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد.

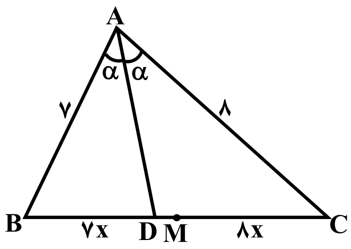
همچنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$AD^۲ = AC.AB - CD.DB \Rightarrow (۷k)^۲ = ۷\times۹ - (۷k)\times(۹k) \Rightarrow ۴۹k^۲ + ۶۳k^۲ = ۶۳$$

$$\Rightarrow ۱۱۲k^۲ = ۶۳ \Rightarrow k^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow k = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BC = x+y = ۱۶k = ۱۶(\frac{۳}{۴}) = ۱۲$$

☜مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۲، ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چقدر است؟

✍حل:



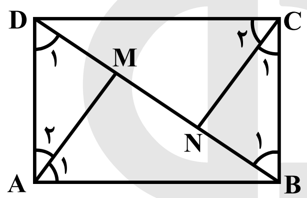
توجه کنید که زاویه‌ی بزرگتر، مقابل به ضلع بزرگتر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = 7x$ و $DC = 8x$ می‌باشد و در نتیجه:

$$7x + 8x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{28}{5} \\ DC = \frac{32}{5} \end{cases}$$

و از طرفی $BM = MC = 6$ می‌باشد، پس: $MD = BM - BD = 6 - \frac{28}{5} = \frac{2}{5} = 0/4$

☜مثال: در مستطیلی به ابعاد ٤ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کنند. اندازه‌ی MN چقدر است؟

✍حل:



$(\hat{D}_1 = \hat{B}_1 \ , \ \hat{C}_1 = \hat{A}_2 \ , \ AD = BC)$

$\overset{\triangle}{ADM} = \overset{\triangle}{CNB} \to DM = BN$

می‌دانیم نیمساز ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند، پس:

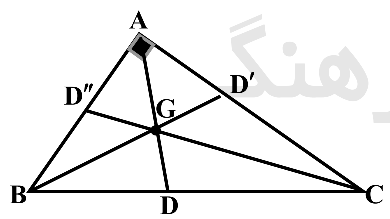
$$\frac{DM}{MB} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \to \frac{DM}{DM + MB} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7} \to$$

$$DM = \frac{3}{7} DB = \frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7} = NB \to$$

$$MN = 5 - 2 \times \frac{15}{7} = 5 - \frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$

☜مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ٤ واحد است. فاصله‌ی دورترین رأس این مثلث از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

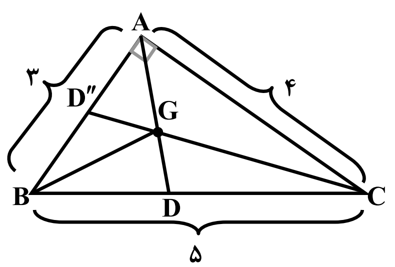
✍حل:



در هر مثلث بلندترین نیمساز نظیر کوتاه‌ترین ضلع است. چون می‌دانیم:

$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD$

لذا هر چه AB و AC بزرگتر و BD و CD کوچکتر شود، طول AD بزرگتر خواهد بود. ضمن آن که می‌دانیم نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند.



$$\frac{D''A}{D''B} = \frac{4}{5} \to \begin{cases} D''A = 4K \\ D''B = 5K \end{cases} \to 4K + 5K = 3 \to K = \frac{1}{3}$$

$$\to D''A = \frac{4}{3} \to CD'' = \sqrt{AD''^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$$

اما:

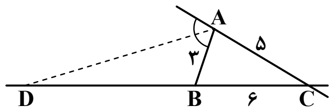
$$\frac{D''G}{GC} = \frac{D''B}{BC} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3} \to \frac{D''G + GC}{GC} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \to GC = \frac{3}{4} D''C = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

☜مثال: در مثلثی به اضلاع ۶، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه خارجی بزرگ‌ترین ضلع را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

✍حل: کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی متناظر با بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی است.

در مورد نیمساز خارجی داریم:



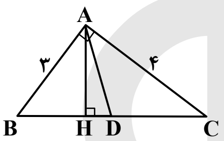
$$\frac{DB}{DC}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{DB}{DB+۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۵DB=۳DB+۱۸\Rightarrow DB=۹$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times DB}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{DB}{BC}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

☜مثال: در مثلث ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ\ ,\ AB=۳\ ,\ AC=۴)$ ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه‌ی DH کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

✍حل:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}BD=۳k\\CD=۴k\end{cases}\Rightarrow ۳k+۴k=۵\Rightarrow k=\frac{۵}{۷}$$

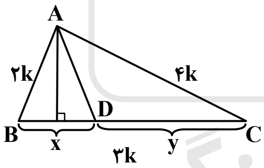
$$AB^{۲}=BH\times BC\Rightarrow ۹=BH\times ۵\Rightarrow BH=\frac{۹}{۵}$$

$$HD=BD-BH=\frac{۱۵}{۷}-\frac{۹}{۵}=\frac{۷۵-۶۳}{۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

☜مثال: اضلاع مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ٤ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی متوسط داخلی آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

✍حل:

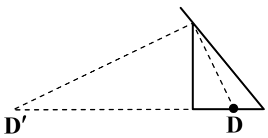


$$\frac{x}{y}=\frac{۲k}{۴k}=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}x=t\\y=۲t\end{cases}\Rightarrow t+۲t=۳k\Rightarrow x=k$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{x}{x+y}=\frac{k}{۳k}=\frac{۱}{۳}$$

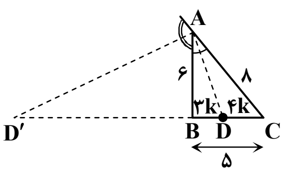
☜مثال: در مثلثی به اضلاع ۸، ٦ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چقدر است؟



۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$

۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ٤) $\frac{۱۲۴}{۷}$

✍حل:



$$۳k+۴k=۵\Rightarrow k=\frac{۵}{۷}$$

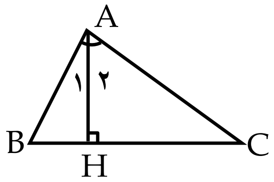
$$BD=۳k=\frac{۱۵}{۷}$$

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{۶}{۸}\Rightarrow\frac{D'B}{D'B+۵}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow D'B=۱۵$$

$$DD'=۱۵+\frac{۱۵}{۷}=\frac{۸\times ۱۵}{۷}=\frac{۱۲۰}{۷}$$

۳) ارتفاع:

پاره‌خطی که یک سر آن بر رأس مثلث و سر دیگرش روی ضلع مقابل (یا امتداد آن) قرار دارد و بر آن ضلع عمود است، ارتفاع نظیر آن رأس مثلث نامیده می‌شود.



نکات:

۱- ارتفاع نظیر هر رأس در مثلث با ضلع کوچکتر، زاویه کمتری می‌سازد.

$$AB < AC \Rightarrow \hat{A}_۱ < \hat{A}_۲$$

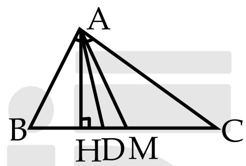
☜مثال: در مثلث ABC، $AC > AB$، AM میانه، AD نیمساز و AH ارتفاع می‌باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

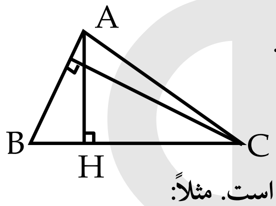
۱) AM بین AD و AH قرار دارد.
۲) AD بین AM و AH قرار دارد.
۳) AH بین AD و AM قرار دارد.
۴) بسته به شکل مثلث هر سه حالت ممکن است.

✍حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر بین اضلاع و زوایا داریم:

$AC > AB \Rightarrow M\hat{A}C < M\hat{A}B \Rightarrow$ نیمساز درون زاویه MAB است $\Rightarrow AD < AM$

$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow B\hat{A}H < H\hat{A}C \Rightarrow AH < AD$





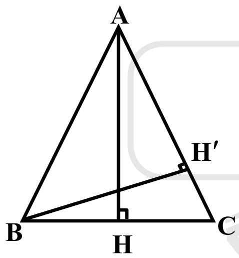
۲- در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی هر دو ضلع برابر است با نسبت عکس ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع.

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$$

نتیجه: کلیه‌ی روابطی که در مورد اضلاع مثلث برقرار است، در مورد عکس ارتفاع‌های مثلث نیز بر قرار است. مثلاً:

$$|b-c| < a < b+c \Rightarrow \left|\frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c}\right| < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

☜مثال: اگر طول اضلاع مثلثی ۲، ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چقدر است؟



✍حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس: $AH = \sqrt{۳^۲ - \left(\frac{۲}{۲}\right)^۲} = ۲\sqrt{۲}$

با استفاده از تساوی مساحت‌ها از دو رابطه:

$$AH \times BC = BH' \times AC \Rightarrow BH' = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲}{۳} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

☜مثال: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$ آن‌گاه مثلث ABC چگونه مثلثی است؟

۱) قائم‌الزاویه
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) متساوی‌الساقین
۴) نامشخص

✍حل: با توجه به تساوی مساحت‌ها:

$$ah_a = bh_b \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{a}{b} \rightarrow a = b$$

۲- اگر همه‌ی زوایای مثلثی حادّه باشند، کلیه‌ی ارتفاع‌های مثلث داخل آن قرار می‌گیرند. امّا اگر مثلثی یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد، ارتفاع‌های نظیر اضلاع آن زاویه بر امتداد اضلاع وارد می‌شوند. در مثلث قائم‌الزاویه هم ۲ تا از ارتفاع‌ها بر اضلاع منطبقند.

☜مثال: اگر در مثلث ABC زاویه‌ی $A = ۹۲°$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

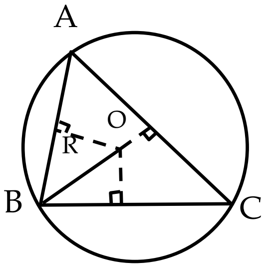
۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه خارج مثلث است.
۲) نقطه‌ی تلاقی سه نیمساز خارج مثلث است.
۳) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است.
۴) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC می‌باشد.

✍حل:اگر در مثلثی یک زاویه منفرجه باشد، ارتفاع‌های نظیر اضلاع زاویه منفرجه در خارج مثلث بر امتداد آن اضلاع وارد می‌شوند.

۳- سه ارتفاع مثلث همرسند.

۴) عمود منصف‌های مثلث:

خطی که در وسط هر ضلع مثلث بر آن عمود است، عمودمنصف مثلث نامیده می‌شود. مثلث دارای سه عمودمنصف است که از یک نقطه می‌گذرند که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. لذا می‌توان از این سه نقطه یک دایره عبور داد که مرکز آن محلّ تلاقی سه عمودمنصف مثلث می‌باشد. این نقطه مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.

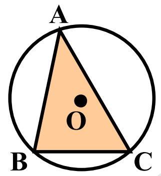


نکات:

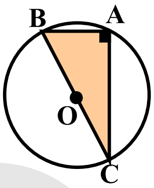
۱- شعاع دایره‌ی محیطی مثلثی به اضلاع a، b، c و مساحت S برابر است با:

$$\boxed{R=\frac{abc}{۴S}}$$

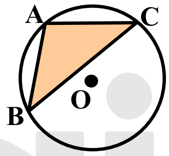
۲- در مثلث حاده‌الزاویه سه عمود منصف در درون مثلث همرسند. در مثلث قائم‌الزاویه سه عمودمنصف در روی وتر همرسند و در مثلث منفرجه‌الزاویه سه عمودمنصف بیرون مثلث همرسند.



ABC حاده‌الزاویه



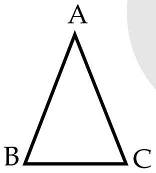
ABC قائم‌الزاویه



ABC منفرجه‌الزاویه

و) خواص مثلث‌های خاص:

۱) مثلث متساوی‌الساقین:

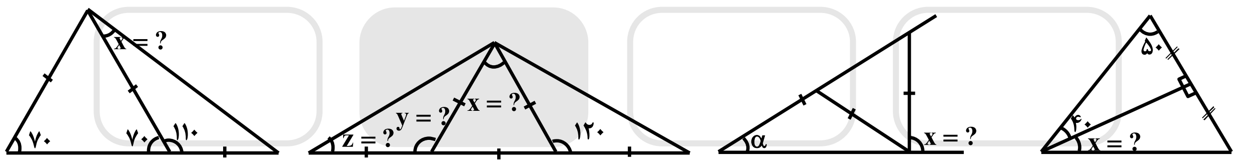


مثلثی که دو ضلع برابر دارد متساوی‌الساقین نامیده می‌شود.

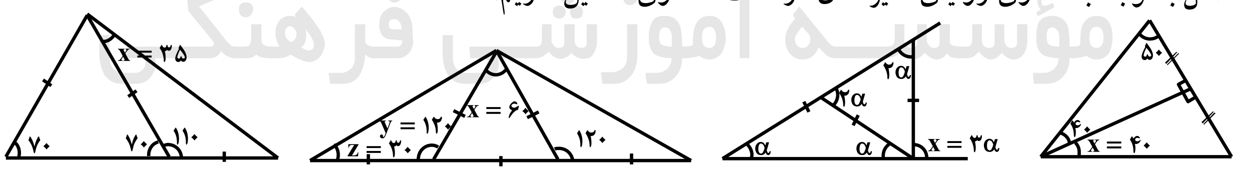
نکات:

۱- در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم مساویند و به عکس اگر دو زاویه‌ی مثلثی مساوی باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

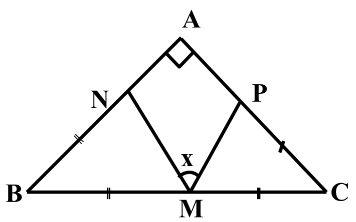
مثال: در شکل‌های زیر متغیرها را بیابید.



حل: با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی‌الساقین داریم:



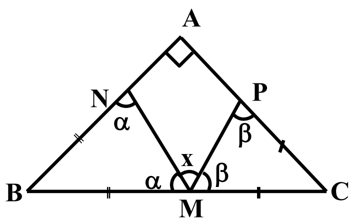
مثال: در این شکل x کدام است؟



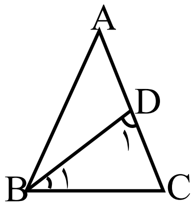
حل:

با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=x+۹۰^\circ\\ \alpha+\beta+x=۱۸۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+۹۰^\circ+x=۱۸۰^\circ\to x=۴۵^\circ$$



مثال: اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC طول نیمساز داخلی $\hat{B}$ برابر طول قاعده‌ی BC باشد، زاویه‌ی A را بیابید.



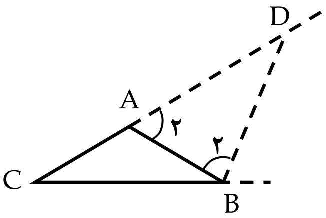
حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=180^\circ-2\hat{C}\\ BD=BC\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_1\Rightarrow \hat{B}_1=180^\circ-2\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_1$$

$$\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{B}_1=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{A}=180^\circ\Rightarrow 5\hat{A}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}=36^\circ$$

مثال: یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر 100° است. نیمساز خارجی یکی از زوایا ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

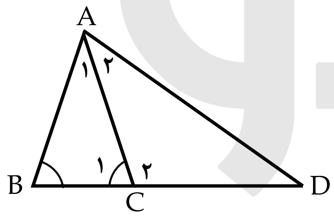


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-100^\circ=80^\circ\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=40^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_2=180^\circ-100^\circ=80^\circ\\ \hat{B}_2=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_2+\hat{A}_2=70^\circ+80^\circ=150^\circ$$

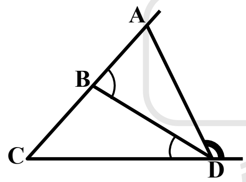
$$\hat{D}=180^\circ-(\hat{B}_2+\hat{A}_2)=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

مثال: در مثلّث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB=AC، $\hat{A}=32^\circ$) قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی ADC چقدر است؟



حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$B=C_1=74\Rightarrow C_2=180-74=106\Rightarrow A\hat{D}C=\frac{180-106}{2}=37$$

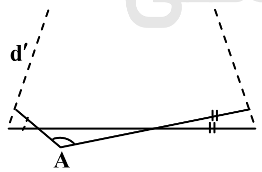


مثال: اگر در شکل زیر $BC=BD=AD$ و $\hat{C}=20^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\hat{D}$ چند درجه است؟

حل: همان‌طور که در یکی از مسائل قبل در حالت کلی نیز اثبات شد، داریم:

$$\hat{D}_1=\hat{C}=20\rightarrow \hat{B}_1=40\rightarrow \hat{A}=40\rightarrow \hat{D}=\hat{A}+\hat{C}=60$$

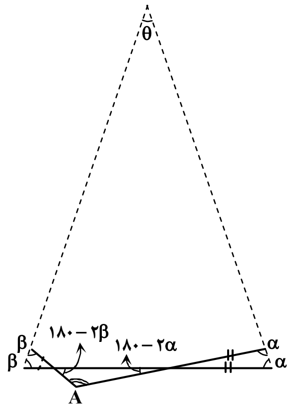
مثال: در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و زاویه $\hat{A}=100^\circ$، دو خط d و d′ با زاویه چند درجه متقاطع‌اند؟



۱) ۲۰ ۲) ۵۰

۳) ٤۵ ٤) ٤۰

حل:



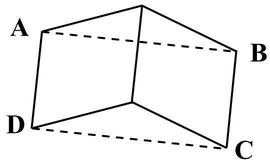
$$180-2\beta+180-2\alpha+A=180$$

$$\Rightarrow\ 2(\alpha+\beta)-A=180$$

$$\Rightarrow\ \alpha+\beta=\frac{180+100}{2}=140$$

$$\theta=180-(\alpha+\beta)=40$$

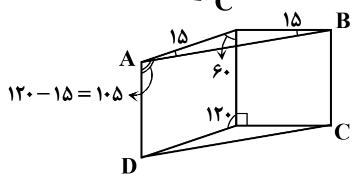
☜مثال: در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه ۶۰ درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگترین زاویه متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵

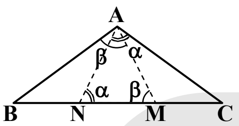
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

حل:



☜مثال: در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خط‌های BM=BA و CN=CA را جدا می‌کنیم، اگر زاویه $\hat{A}=۷۲°$ باشد، زاویه MAN چند درجه است؟

۱) ۵٤ ۲) ۵۲ ۳) ٤۸ ٤) ٤۲



✍حل:

$$M\hat{A}N=۱۸۰-(\alpha+\beta)$$

$$\hat{B}+\hat{C}=۱۰۸=۱۸۰-۲\alpha+۱۸۰-۲\beta=۳۶۰-۲(\alpha+\beta)$$

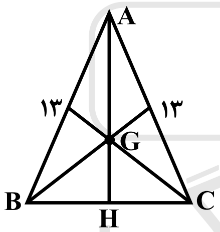
$$\Rightarrow\ ۱۸۰-(\alpha+\beta)=۵۴=M\hat{A}N$$

۲- در هر مثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر ساق‌ها با هم و ارتفاعات وارد بر ساق‌ها با هم مساوی هستند و نیمسازهای زوایای مقابل به ساق‌ها نیز با هم مساوی هستند، عکس این مطالب نیز درست است.

۳- در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس، ارتفاع، میانه و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و بالعکس.

☜مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۱۰ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

✍حل:



در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل تقاطع میانه‌ها روی ارتفاع وارد بر قاعده قرار دارد.

$$AH=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$$

چون میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند داریم:

$$AG=\frac{۲}{۳}AH=۸$$

$$GH=\frac{۱}{۳}AH=۴$$

لذا بر اساس رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$GH^۲+HC^۲=GC^۲\to ۴^۲+۵^۲=GC^۲\Rightarrow GC=\sqrt{۴۱}$$

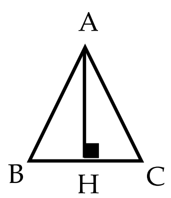
که چون $۷>\sqrt{۴۱}>۶$ است پس A دورترین رأس محسوب می‌شود:

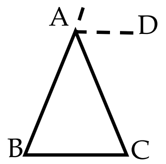
$$AG=۸$$

البته می‌دانیم میانه‌ی وارد بر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین میانه است.

٤- مساحت مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌ی a و ساق b مساوی است با:

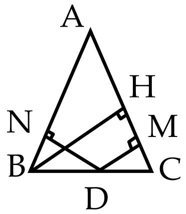
$$\boxed{\frac{۱}{۲}a\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{٤}}}$$





۵- هر گاه در مثلث ABC نیمساز خارجی رأس A با ضلع BC موازی باشد، $AB = AC$ است و بالعکس.

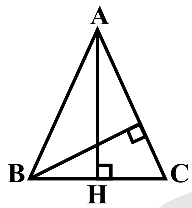
$$AD \parallel BC \Leftrightarrow AB = AC$$



۶- مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق آن.

$$\boxed{DM + DN = BH}$$

☜مثال: درمثلّثی به اضلاع ۵، ۵ و ٦ واحد نقطه‌ی **M** ضلع بزرگتررا به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است.مجموع فواصل **M** از دو ساق این مثلّث کدام است؟

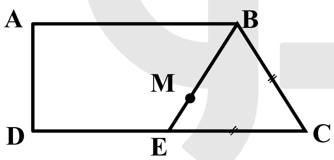


✍حل:

مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق آن. با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس و روابط بین ارتفاع‌ها و اضلاع داریم:

$$AH = \sqrt{AC^{۲} - CH^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} - ۳^{۲}} = ۴ \rightarrow \frac{۴ \times ۶}{۲} = \frac{h \times ۵}{۲} \rightarrow h = ۴/۸$$

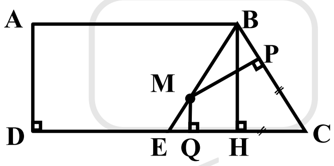
☜مثال: در شکل مقابل، چهارضلعی **ABCD** ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است و **CB = CE**. مجموع فواصل نقطه‌ی **M** از دو خط **CB** و **CE** برابر کدام است؟



۱) DE　　۲) BC

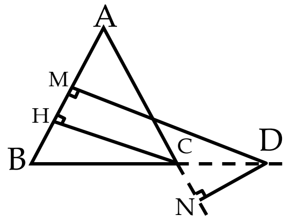
۳) BE　　٤) AD

✍حل: گزینه ٤ پاسخ است.



مثلث CBE متساوی‌الساقین است. در هر مثلث متساوی‌الساقین فاصله‌ی یک نقطه روی قاعده از دو ساق همواره برابر با ارتفاع وارد بر ساق است. ارتفاع وارد بر ساق در مثلث CBE همان ارتفاع ذوزنقه است. چون ذوزنقه، قائم‌الزاویه می‌باشد، پس ارتفاع آن برابر با ضلع AD است. با توجه به این توضیح داریم:

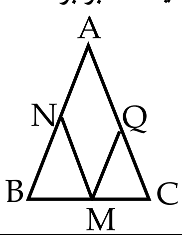
MP + MQ = ارتفاع وارد بر ساق **= BH = AD**



۷- قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه واقع بر امتداد قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث.

$$\boxed{CH = |DM - DN|}$$

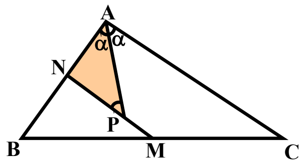
۸- هرگاه از نقطه‌ی M واقع بر قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، دو خط به موازات ساق‌ها رسم کنیم تا ساق AB را در N و ساق AC را در Q قطع کند، چهارضلعی $ANMQ$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود و محیط آن برابر است با مجموع دو ساق مثلث ABC؛ در حالت خاص اگر M وسط BC باشد $ANMQ$ لوزی خواهد بود.



$$\boxed{AN + NM + MQ + QA = AB + AC = ۲AB}$$

۹- در مثلث متساوی‌الساقین اگر **BC** قاعده باشد، آن‌گاه $\frac{BC}{۲} < AB, AC$ است.

۱۰- اگر از یک نقطه روی نیمساز خطی به موازات یکی از دو ضلع زاویه رسم شود، مثلث به‌وجود آمده متساوی‌الساقین خواهد بود.



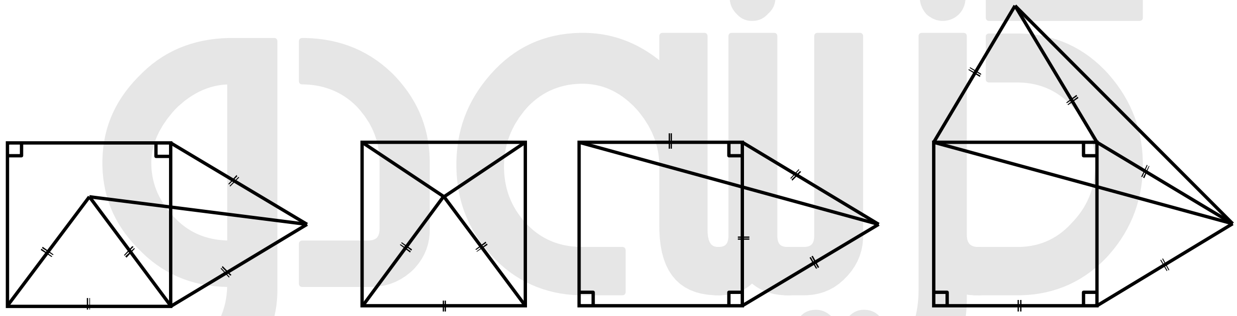
۲) مثلث متساوی‌الاضلاع:

مثلثی که ۳ ضلع برابر داشته باشد ، متساوی‌الاضلاع نام دارد.

نکات:

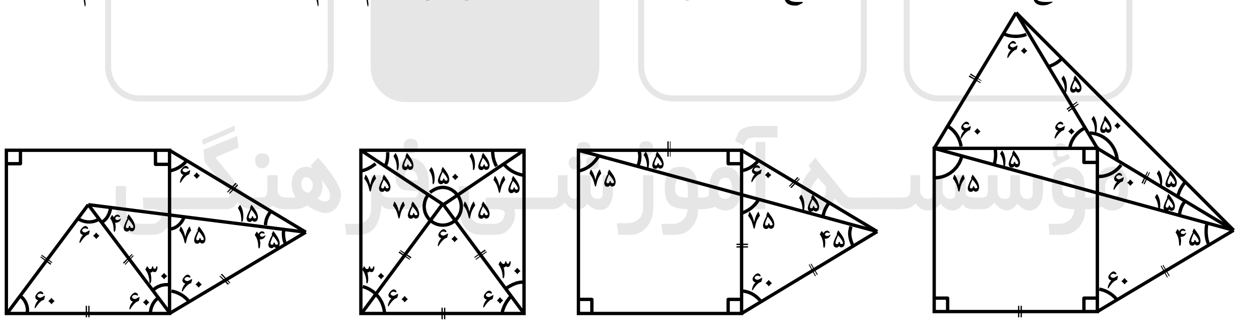
۱- تمام زوایای مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است . لذا تمام ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین درباره‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است. به اضافه آن‌که در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل برخورد ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق‌اند.

☜مثال: در شکل‌های زیر یک ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع بر یک ضلع مربع منطبق است. کلیه زوایا را به‌دست آورید.



✍حل:

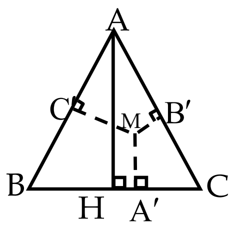
با توجه به زوایای مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع و خواص مثلث متساوی‌الساقین می‌توانیم تمام زوایا را به‌دست آوریم .



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر با a باشد اندازه ارتفاع نظیر هر رأس برابر است با $\boxed{h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}}$

و مساحت مثلث $\boxed{S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{٤}}$ می‌باشد.

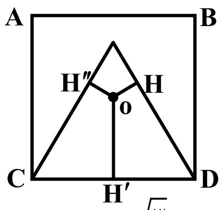
۳- هرگاه M نقطه‌ای واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد. آن‌گاه مجموع فاصله‌های M از سه ضلع برابر است با ارتفاع نظیر یکی از رأس‌های مثلث.



$$\boxed{MB' + MC' + MA' = AH}$$

مثال: در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

حل:



چون مرکز مربع، داخل مثلث است و می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاع مثلث، برابر ارتفاع است پس:

$$OH + OH' + OH'' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه ضلع برابر یک می‌باشد. بین مساحت (S) و محیط $(2p)$ مثلث کدام رابطه صحیح است؟

۱) $2S = p$ ۲) $S = 2p$ ۳) $S = p$ ۴) $3S = p$

حل:

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است. پس:

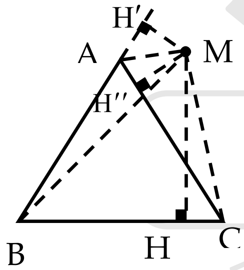
$$a\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2p = 3a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{1}{p} \quad \text{یا} \quad 3S = p$$

که در این سؤال $3S = p$ موردنظر بوده است.

مثال: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد. $MH + MH' - MH''$ برابر چیست؟

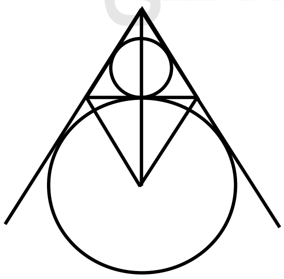


حل: از M بر اضلاع یا امتداد آن‌ها عمود رسم می‌کنیم.

و سپس مساحت ABC را برحسب مساحت مثلث‌های ایجاد شده می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} - S_{AMC} = \frac{MH' \times a}{2} + \frac{MH \times a}{2} - \frac{MH'' \times a}{2} = \frac{a}{2}(MH + MH' - MH'')$$

$$\rightarrow MH + MH' - MH'' = \frac{2S}{a} = \frac{\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$



۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره‌ی محاطی داخلی برابر $r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ و شعاع دایره‌ی محاطی خارجی $r_a = r_b = r_c = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و شعاع دایره‌ی محیطی $R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد.

مثال: اگر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی ۶ باشد، اندازه‌ی شعاع یکی از دایره‌های محاطی خارجی آن را بیابید.

حل: با توجه به نکته‌ی فوق:

$$\frac{2}{3}h = 6 \rightarrow r_a = h = \frac{18}{2} = 9$$

۵- بین همه‌ی مثلث‌های با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت و بین همه‌ی مثلث‌های با مساحت ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای کمترین محیط است.

مثال: محیط مثلثی ۳۶ است. حداکثر مساحت آن کدام است؟

حل:

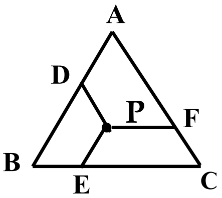
با توجه به نکته بالا در صورتی ماکزیمم مساحت را خواهیم داشت که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. پس:

$$۲p = ۳a = ۳۶ \Rightarrow a = ۱۲$$

$$s = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = ۳۶\sqrt{۳}$$

۶- اگر از یک نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، خطوطی موازی اضلاع رسم کنیم. خواهیم داشت:

$$PD + PF + PE = a$$



۳) مثلث قائم‌الزاویه:

مثلثی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، قائم‌الزاویه نام دارد.

نکات:

۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس اگر در مثلثی میانه‌ی وارد بـر یـک ضـلع، نصـف آن ضلع باشد، آن مثلث در رأس روبه‌رو به آن ضلع قائم‌الزاویه است.

مثال: در مثلثی یکی از زوایا ۳۰° و تفاضل دو زاویه‌ی دیگر نیز ۳۰° می‌باشد. در صورتی که طـول بزرگتـرین ضـلع ایـن مثلث ۸ باشد، طول میانه‌ی وارد بر این ضلع کدام است؟

حل:

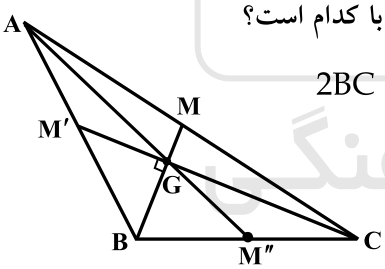
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = ۱۵۰^\circ \\ \hat{A} - \hat{C} = ۳۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

لذا مثلث ABC قائم الزاویه است و بزرگترین ضلع آن وتر آن است و می‌دانیم میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، لذا:

$$AM = \frac{BC}{۲} = ۴$$

مثال: اگر در مثلث **ABC** میانه‌های اضلاع **AB** و **AC** بر هم عمود باشند، میانه‌ی **BC** برابر با کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}BC$ ۲) $\frac{۳}{۲}BC$ ۳) BC ۴) 2BC

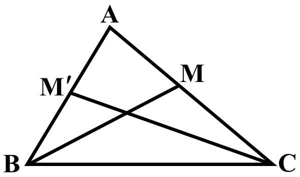


حل:

$$GM'' = \frac{۱}{۲}BC \rightarrow AM'' = \frac{۳}{۲}BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه $(A = ۹۰^\circ)$:

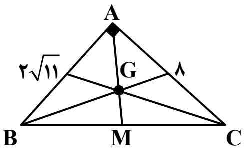
$$m_b^{۲} + m_c^{۲} = ۵m_a^{۲} = \frac{۵}{٤}a^{۲}$$



مثال: اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۸ و $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از وسـط وتـر ایـن مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل:



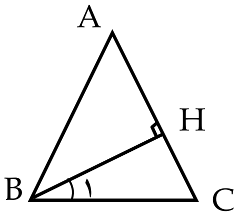
$$BC = \sqrt{۴\times ۱۱ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۸} = \sqrt{۴\times ۲۷} = ۶\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{۲} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow GM = \frac{۱}{۳}AM = \sqrt{۳}$$

۲- در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است و بالعکس.

مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر یک ساق نصف آن ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و ضلع BC کدام است؟

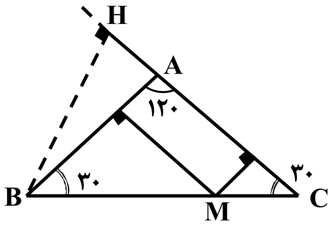
حل:



$$BH=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}AB \Rightarrow \hat{A}=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=۹۰^\circ-۷۵^\circ=۱۵^\circ$$

مثال: در مثلث متساوی‌الساقین **ABC**، زاویه‌ی رأس ۱۲۰° و قاعده‌ی آن ۱۲ سانتی‌متر است. مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده‌ی مثلث از دو ساق آن چقدر است؟

حل:



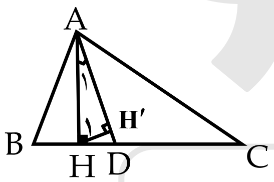
مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق:

$$BH=\frac{۱}{۲}BC=۶$$

٤- اگر در مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

مثال: در مثلث ABC می‌دانیم: $\hat{B}-\hat{C}=۳۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی H، پای ارتفاع AH، از نیمساز AD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}AH$ ۲) $\frac{۱}{٤}AD$ ۳) $\frac{۱}{۳}AD$ ٤) $\frac{۱}{۸}BC$

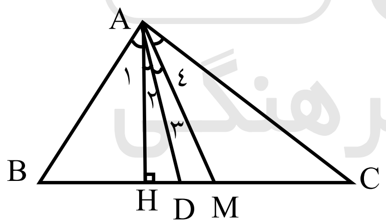


حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$H\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|=\frac{۱}{۲}\times۳۰^\circ=۱۵^\circ \quad \Rightarrow HH'=\frac{۱}{۴}AD$$

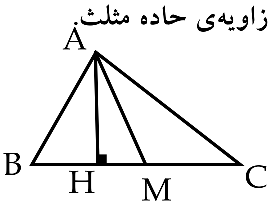
فاصله‌ی H از نیمساز AD (ارتفاع مثلث AHD) $\frac{۱}{۴}$ وتر مثلث (AD) است.

۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، پاره‌خط‌های AH، AD و AM به‌ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانه‌ی وارد بر وتر BC هستند، در این‌صورت روابط زیر برقرارند:



$$\hat{A}_۱=\hat{A}_٤=\hat{C}$$
$$\hat{A}_۲=\hat{A}_۳$$
$$\hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{A}_٤=\hat{B}$$

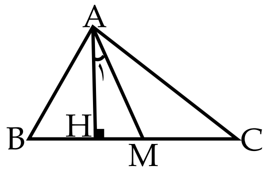
٦- در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده مثلث.



$$H\hat{A}M=\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر ۲٦° است. کوچکترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

حل: طبق نکته‌ی فوق:

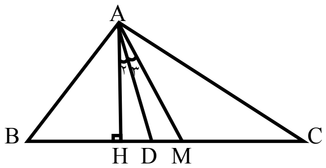


$$\left|\hat{B}-\hat{C}\right|=۲۶^\circ \overset{\hat{B}>\hat{C}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l}\hat{B}-\hat{C}=۲۶^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow ۲\hat{C}=۹۰^\circ-۲۶^\circ \Rightarrow \hat{C}=۳۲^\circ$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$، اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز و میانه‌ی نظیر رأس A کدام است؟

۱) $\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$ ۲) $\frac{1}{2}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$ ۳) $\frac{1}{2}\left|\hat{B}-2\hat{C}\right|$ ۴) $\frac{1}{4}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$

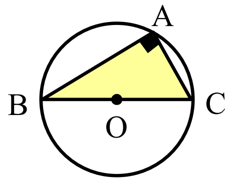
حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:



$$H\hat{A}D=\frac{1}{2}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$$

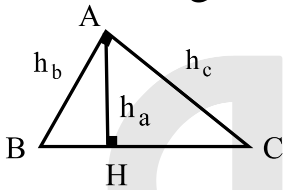
در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}_2=\hat{A}_3$ لذا $D\hat{A}M=\frac{1}{2}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث وسط وتر است و اندازه‌ی وتر مثلث برابر است با قطر دایره‌ی محیطی.



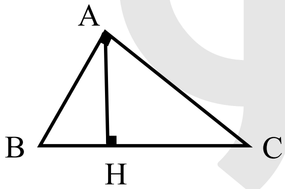
$$BC=2R$$

۸- در مثلث قائم‌الزاویـه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ اگر h_a، h_b و h_c به‌ترتیب اندازه‌ی ارتفاع‌های نظیر ضـلع‌هـای BC، AC و AB باشند، آن‌گاه:



$$\boxed{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}}$$

۹- اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه ،ارتفاع نظیر وتر رسم شود، سه مثلث متشابه به‌وجود می‌آید:



$$ABH \simeq ACH \simeq ABC$$

لذا در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

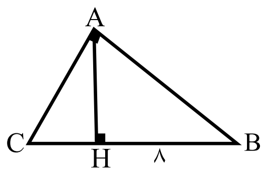
$$\boxed{\begin{aligned}AB^2&=BH\times BC\\AC^2&=CH\times BC\\AH^2&=BH\times CH\end{aligned}}$$

یعنی هر ضلع واسط هندسی بین طول تصور آن ضلع بر وتر و طول وتر مثلث می‌باشد. همچنین ارتفاع وارد بـر وتـر، میـانگین هندسی دو قطعه‌ای است که آن ارتفاع بر روی وتر جدا می‌کند. (طریقه‌ی رسم میانگین هندسی)

تذکر: این روابط معکوس‌پذیر نمی‌باشند یعنی از برقرار بودن هیچ‌یک از روابط فوق در یک مثلث نمی‌توان نتیجه گرفت مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال: مطابق شکل مقابل طول پاره‌خط BH برابر ۸ می‌باشد. در صورتی که وتر BC برابر ۱۰ باشد، ارتفـاع وارد بـر وتـر BC و طول ضلع AB را بیابید.

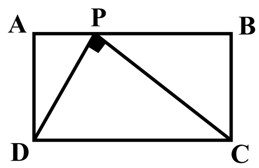
حل: با توجه به روابط گفته شده:



$$\left.\begin{aligned}BC=10\\BH=8\end{aligned}\right\}\Rightarrow CH=2 \qquad AH^2=BH\times CH=8\times 2=16\Rightarrow AH=4$$

$$AB^2=BH\times BC\Rightarrow AB^2=8\times 10=80\Rightarrow AB=\sqrt{5\times 16}\Rightarrow AB=4\sqrt{5}$$

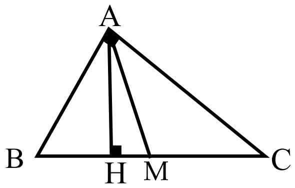
مثال:در مستطیل شکل مقابل $\hat{P}=90^\circ$ و $3AP=BP=9$، طول DP کدام است؟



حل: اگر از P به CD عمود کنیم، قطعاتی که ارتفاع روی CD ایجاد مـی‌کنـد بـا AP و PB برابر است. لذا:

$$DP^2=AP\times AB=3\times 12=36\rightarrow DP=6$$

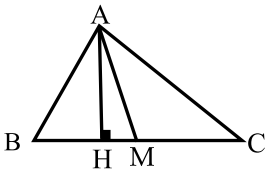
☜مثال: در مثلث ABC ($\widehat{A}=۹۰^\circ$) ارتفاع AH ومیانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. اگر HB و HC به‌ترتیب ٤ و۹ واحد باشند، مساحت مثلّث AMH کدام است؟



✍حل: با توجه به روابط گفته شده:

$$\left.\begin{array}{l} AH^{۲}=BH\times CH=۴\times ۹\rightarrow AH=۶ \\ \left.\begin{array}{l} BM=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵ \\ BH=۴ \end{array}\right\}\rightarrow HM=۲/۵ \end{array}\right\}\rightarrow S=\frac{۲/۵\times ۶}{۲}=۷/۵$$

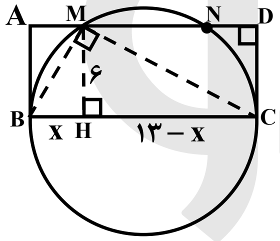
☜مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به‌ترتیب ۳ و $۲\sqrt{۲}$ است. اندازه‌ی ضلع متوسط این مثلث کدام است؟



✍حل: با توجه به روابط گفته شده:

$$AM=۳\rightarrow BC=۶$$
$$HM=\sqrt{AM^{۲}-AH^{۲}}=\sqrt{۹-۸}=۱\rightarrow BH=۲,CH=۴$$
$$\rightarrow AC^{۲}=CH\times BC=۴\times ۶\rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$

☜مثال: در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ٦ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟

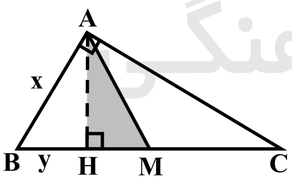


✍حل: مثلث MBC در رأس M قائمه است (چون BC قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰° است.) حال در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است. بنابراین:

$$۶^{۲}=x(۱۳-x)\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=۹ \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچکتر یعنی $BH=۴$ می‌باشد و در نتیجه $AM=۴$ و به همین ترتیب $ND=۴$. در نتیجه $MN=۱۳-(۴+۴)=۵$.

☜مثال: در مثلث ABC، $AC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB$، $\hat{A}=۹۰^\circ$ و ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟



✍حل: ارتفاع AH در هر دو مثلث ABC و AHM مشترک است، بنابراین کافیست نسبت قاعده‌ها را حساب کنیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}}=\frac{BC}{MH}\quad (*)$$

با فرض $AB=x$ و $BH=y$ داریم:

$$AB=x\ ,\ AC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}x\ \xrightarrow[\text{مثلث }ABC]{\text{قضیه فیثاغورس در}}\ BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=x^{۲}+(\frac{\sqrt{۵}}{۲}x)^{۲}=\frac{۹}{۴}x^{۲}$$

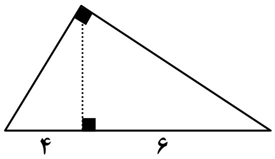
$$\Rightarrow\ BC=\frac{۳}{۲}\times x\xrightarrow[\text{مثلث }ABC]{\text{میانه }AM}BM=\frac{۳}{۴}x$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واسطه‌ی هندسی بین وتر و تصویر همان ضلع روی وتر است، پس:

$$AB^{۲}=BC.BH\Rightarrow\ x^{۲}=y\times\frac{۳}{۲}x\Rightarrow\ y=\frac{۲}{۳}x\Rightarrow\ MH=\frac{۳}{۴}x-\frac{۲}{۳}x=\frac{۱}{۱۲}x\Rightarrow\ \frac{BC}{MH}=\frac{\frac{۳}{۲}x}{\frac{۱}{۱۲}x}=۱۸$$

براساس رابطه‌ی (*)، می‌توان گفت که مساحت مثلث ABC، ۱۸ برابر مساحت مثلث AMH است.

مثال: در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازه بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

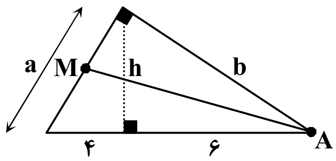


۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$

۳) $\sqrt{۷۰}$ ٤) $\sqrt{۷۵}$

حل:

بزرگ‌ترین میانه نظیر کوچک‌ترین ضلع است.



$$h^۲ = ۴\times۶ \Rightarrow h = ۲\sqrt{۶}$$

$$a = \sqrt{h^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۴+۱۶} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

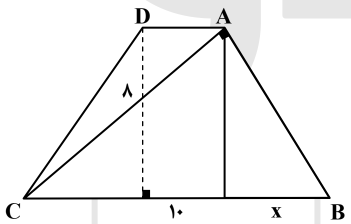
$$b = \sqrt{h^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۲۴+۳۶} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$AM = \sqrt{b^۲ + (\frac{a}{۲})^۲} = \sqrt{۶۰+۱۰} = \sqrt{۷۰}$$

مثال: در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ‌تر و قطر آن به‌ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه‌ی قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/٦ ٤) ٤/۲

حل:



$$AB = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

$$AB^۲ = x\times۱۰ \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۱۰} = ۳/۶$$

$$AD = ۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۷/۲ = ۲/۸$$