

جزوه کمک‌آموزشی حسابان

فصل ۱: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

وقت پیشنهادی: ۸۰ دقیقه

 ۱- در یک دنباله‌ی حسابی داریم $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 40$ ، مجموع ۱۹ جمله‌ی اول این دنباله‌ی چقدر است؟

- (۱) ۱۹۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۸۰ (۴) ۴۰۰

 ۲- مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ برابر با ۲ است. جمله اول این دنباله‌ی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله‌ی اول ۱۲۶ است. قدرنسبت این دنباله‌ی چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

 ۴- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_5 = 12$ و $a_{12} = 33$ باشد مجموع $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ چقدر است؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۲۰

۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه ۶ و ۸، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی تشکیل شود. سپس وسط‌های اضلاع مثلث جدید را به هم وصل می‌کنیم و این عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم. مجموع محیط‌های این مثلث‌ها چقدر است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۲ (۳) ۴۸ (۴) ۶۰

 ۶- اگر $x > 0$ و داشته باشیم $\frac{1}{2x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۷- در یک دنباله‌ی عددی اگر به قدرنسبت آن ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۱۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده می‌شود؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

 ۸- حاصل عبارت $\dots + (\frac{1}{8} - \frac{1}{27}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

 ۹- بین دو عدد ۲ و $32\sqrt{2}$ هشت عدد چنان درج کرده‌ایم که ۱۰ عدد تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. مجموع این ۱۰ عدد چقدر است؟

- (۱) $31(\sqrt{2} + 2)$ (۲) $31(\sqrt{2} + 1)$ (۳) $62(\sqrt{2} + 2)$ (۴) $62(\sqrt{2} + 1)$

 ۱۰- اگر چند جمله‌ای $mx^2 - 4x + 3$ بر $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار m چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

 ۱۱- اگر باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 6$ برابر با $x + 1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x) + f(x+4) + f(x-1)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

 ۱۲- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ برابر ۲ و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 3$ برابر ۲- باشد باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ کدام است؟

- (۱) $x - 1$ (۲) $-x + 1$ (۳) $-x - 1$ (۴) $x + 1$

 ۱۳- اگر باقی‌مانده $f(x) = x^2 - mx + 2$ بر $x - 1$ برابر ۲- باشد، باقی‌مانده $f(x)$ بر $x + 2$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

 ۱۴- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ برابر ۲ و باقی‌مانده تقسیم $g(x)$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد باقی‌مانده تقسیم $f(x)g(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۱

 ۱۵- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $-3x + 1$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(2x - 2) - f(x - 1)$ بر $x - 2$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

 ۱۶- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^{17} - mx^3 + 2$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + x + 1$ کدام است؟

- (۱) $-x$ (۲) $-x + 1$ (۳) $-x + 2$ (۴) $-x + 3$

۱۷- اگر $P(x)$ چند جمله‌ای درجه‌ی سوم باشد که بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و در تقسیم بر $x-x^3$ باقی‌مانده‌ای برابر ۱۲ داشته باشد، مقدار $P(-2)$ چقدر است؟

- ۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۱۸- بسط چند جمله‌ای $(x+1)^6 + (x+1)^8 + (x+1)^{10}$ چند جمله دارد؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴)

۱۹- مجموع ضرایب عددی بسط $(3x-4y)^{13}$ کدام است؟

- ۷^{۱۳} (۱) 2×3^{14} (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

۲۰- جمله‌ی مستقل از x در بسط $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴)

۲۱- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $a = 2^{2k-2} \times 5^{m+3} \times 7^{n^2+3}$ و $b = 2^{2k+1} \times 5^{m+2} \times 7^2$ برابر ۹۸۰ باشد مقدار $m+k$ چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲- چند مکعب لازم است تا بتوانیم یک مکعب مستطیل به ابعاد ۹۱ و ۱۴۳ و ۱۹۵ سانتی‌متر را با بزرگ‌ترین مکعب‌های هم‌اندازه پر کنیم؟

- ۱۱۲۰ (۱) ۱۰۳۰ (۲) ۱۱۴۵ (۳) ۱۱۵۵ (۴)

۲۳- در یک کارگاه که دو کارگر با هم کار می‌کنند کاری را در ۱۲ روز تمام می‌کنند، اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۰ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. اگر کارگر اول کار را به تنهایی در a روز و کارگر دوم همان کار را به تنهایی در b روز تمام کند، $a+b$ چقدر است؟

- ۴۵ (۱) ۵۰ (۲) ۵۵ (۳) ۶۰ (۴)

۲۴- معادله $x^2 - 2mx - 1 = 0$ به‌ازای جمع مقادیر m :

- (۱) دو ریشه مثبت دارد. (۲) دو ریشه منفی دارد. (۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. (۴) ریشه ندارد.

۲۵- معادله $(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$ دارای:

- (۱) چهار ریشه ساده حقیقی است. (۲) دو ریشه‌ی ساده حقیقی است. (۳) دو ریشه مضاعف دارد. (۴) معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲۶- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشد، حاصل $\frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\beta+1}{\alpha}$ چقدر است؟

- ۵ (۱) -۵ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

۲۷- کدام‌یک از معادلات زیر ریشه‌هایش ۲ واحد از ریشه‌های معادله $x^2 + mx - m - 1 = 0$ کم‌تر است؟

- (۱) $x^2 - (m+4)x + m + 3 = 0$ (۲) $x^2 + (m+4)x - m - 3 = 0$ (۳) $x^2 + (m+4)x + m + 3 = 0$ (۴) $x^2 - (m+4)x - m - 3 = 0$

۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2} + \frac{1}{\beta^3 + 3\beta^2 + 2}$ کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۲۹- کدام‌یک از معادلات زیر ریشه‌هایش از مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، ۱ واحد کم‌تر است؟

- (۱) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (۲) $x^2 + 5x - 5 = 0$ (۳) $x^2 + 5x + 5 = 0$ (۴) $x^2 - 5x - 5 = 0$

۳۰- نقطه‌ای روی خط $y = -2x + 1$ که از دو نقطه‌ی $A(-3, 0)$ و $B(1, 0)$ به یک فاصله است، از مبدأ مختصات چقدر فاصله دارد؟

- $\sqrt{7}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{10}$ (۴)

۳۱- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{3}{x}$ به‌ازای مقادیر مثبت x چقدر است؟

- $\sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۳۲- بیش‌ترین مساحت یک قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۲۰۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟ (ضلع مشرف به آب نرده ندارد.)

(۱) ۴۰۰۰ (۲) ۵۰۰۰ (۳) ۶۰۰۰ (۴) ۷۰۰۰

۳۳- در معادله‌ی $x^2 - 6x + m + 5 = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها دو برابر قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر باشد مقدار m چقدر است؟

(۱) -۴۴ (۲) -۵۵ (۳) -۶۶ (۴) -۷۷

۳۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{x_1^2} - \frac{8}{x_2^2}$ چقدر است؟

(۱) -۱۸ (۲) -۲۴ (۳) -۳۲ (۴) -۴۰

۳۵- به‌ازای کدام مقادیر m نمودار منحنی تابع $y = (m+1)x^2 - x + 2$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

(۱) $m > -1$ (۲) $m < -1$ (۳) $-2 < m < -1$ (۴) $-1 < m < 2$

۳۶- معادله $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۷- اگر $\frac{8x-15}{x^2-3x} + \frac{3}{3-x} = \frac{A}{x}$ ، عدد A کدام است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) ۱۲

۳۸- در معادله $\sqrt{3+\sqrt{x-x^3}} = \sqrt{3}$ مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۳۹- مجموعه‌ی جواب نامعادله $\frac{|2x|-4}{|x|+2} \geq 0$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $[-2, 2]$

۴۰- چند عدد صحیح در مجموعه‌ی جواب نامعادله $\sqrt{x+2} \leq 3-x$ وجود دارند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۱- اگر $x \geq 2$ باشد مجموعه‌ی جواب نامعادله $x^2 - |2-x| \leq 8$ کدام است؟

(۱) $[2, 5]$ (۲) $[-2, 3]$ (۳) $[2, 3]$ (۴) $[2, 4]$

۴۲- معادله $|x-2| + \sqrt{x-1} + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۳- مجموعه جواب $3|2x-3| - |3-2x| < 6$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2} < x < 0$ (۳) $0 < x < \frac{3}{2}$ (۴) $0 < x < 3$

۴۴- معادله‌ی $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x-3} - 3$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴) جواب ندارد

۴۵- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-2| + |x+1| \leq 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۶- معادله‌ی $x^2 - \frac{1}{x} + 2x = 1$ دارای چند ریشه است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ریشه ندارد

۴۷- معادله‌ی $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{2}{\pi}$ دارای چند ریشه است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۸- مساحت محدود به شکل $|x-1| + |y| = 2$ چقدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۴۹- معادله‌ی $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = 6x-4$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ‌های تشریحی فصل ۱

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم در یک دنباله‌ی حسابی داریم: $m + n = r + s \Rightarrow a_m + a_n = a_r + a_s$

بنابراین خواهیم داشت: $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12} = a_1 + a_{19}$

در نتیجه: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 40 \Rightarrow 2a_1 + 2a_{19} = 40$

$$\Rightarrow a_1 + a_{19} = 20$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{19}) = \frac{19}{2} \times 20 = 190$$

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم در یک دنباله‌ی هندسی اگر $|q| < 1$ و تعداد جملات نامتناهی باشد حد مجموع جملات این دنباله‌ی از رابطه‌ی $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ به‌دست می‌آید. خواهیم داشت:

$$2 = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 2 = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= 112 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 112 \\ S_6 &= 126 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 126 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = \frac{126}{112} \Rightarrow \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = \frac{126}{112} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{126}{112} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{63}{56}$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{63}{56} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{33 - 12}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12 \Rightarrow a_1 + 12 = 12 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = S_9 - S_4 = \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] - \frac{4}{2}[2a_1 + 3d] = \frac{9}{2}(0 + 24) - 2(0 + 9) = 9 \times 12 - 2 \times 9 = 90$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\text{وتر} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow \text{محیط مثلث} = 6 + 8 + 10 = 24$$

اگر وسط‌های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم محیط مثلث حاصل نصف محیط مثلث اولیه خواهد بود. داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = 24$$

$$\text{محیط مثلث دوم} = 12$$

$$\text{محیط مثلث سوم} = 6$$

$$24 + 12 + 6 + 3 + \dots$$

بنابراین مجموع محیط مثلث‌ها مجموع مقابل خواهد بود:

این اعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و تعداد جملات نامتناهی خواهد بود، بنابراین مجموع را از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{24}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{24}{\frac{1}{2}} = 48$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

از رابطه پیدا است که $x < 1$ باید باشد و گر نه طرفین تساوی نمی‌توانند برابر باشند. جملات این مجموع تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با تعداد

جملات نامتناهی و قدرنسبت x می‌دهند، بنابراین مجموع سمت چپ تساوی را از رابطه‌ی $\frac{a_1}{1-q}$ می‌نویسیم. داریم:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2x} \Rightarrow 2x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$S_n = \frac{n}{r} [ra_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{r} [ra_1 + 9d] = 5(2a_1 + 9d)$$

$$\text{جدید } S_{10} = 5(2a_1 + 9(d+2)) = 5(2a_1 + 9d + 18) = 5(2a_1 + 9d) + 90$$

به مجموع ۱۰ جمله‌ی اول، ۹۰ واحد افزوده می‌شود.

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$S = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)}_{S_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right)}_{S_2}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \\ S_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a_1 = 2$$

$$a_{10} = 32\sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^9 = 32\sqrt{2} \Rightarrow 2q^9 = 32\sqrt{2} \Rightarrow q^9 = 16\sqrt{2} \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{2(1-2^5)}{1-\sqrt{2}} = 62(\sqrt{2}+1)$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 2(2)^2 - 4(2) + 4m = 0 \Rightarrow 12 - 8 + 4m = 0 \Rightarrow 4m = -4 \Rightarrow m = -1$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \hline x+1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x - 6 \\ q_1(x) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = (x^2 - x - 6)q_1(x) + x + 1 \\ \text{رابطه تقسیم} \end{array}$$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow f(3) = 4 \\ x=-2 \Rightarrow f(-2) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f(x+4) + f(x-1) \\ \hline R \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ q_2(x) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} f(x+4) + f(x-1) = (x+1)q_2(x) + R \\ x=-1 \Rightarrow f(3) + f(-2) = R \Rightarrow R = 3 \end{array}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \hline 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ q_1(x) \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = (x-1)q_1(x) + 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 2$$

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \hline -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x+3 \\ q_2(x) \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = (x+3)q_2(x) - 2 \xrightarrow{x=-3} f(-3) = -2$$

چون مقسوم‌علیه $x^2 + 2x - 3$ درجه ۲ است بنابراین باقی‌مانده حداکثر درجه یک بوده و آن را $ax + b$ می‌گیریم. داریم:

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \hline ax+b \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 \\ q(x) \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = (x^2 + 2x - 3)q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1) = a+b=2 \\ x=-3 \Rightarrow f(-3) = -3a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow r(x) = x+1$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$f(x) = x^3 - mx + 2 \quad | \quad x-1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 - m + 2 = -2 \Rightarrow m = 5$$

$$m = 5 \Rightarrow f(x) = x^3 - 5x + 2$$

$$f(x) \quad | \quad x+2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(-2) = (-2)^3 - 5(-2) + 2 = 4$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$f(x) \quad | \quad x-2$$

$$\Rightarrow f(2) = 2$$

$$g(x) \quad | \quad x-2$$

$$\Rightarrow g(2) = 3$$

$$f(x)g(x) \quad | \quad x-2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(2)g(2) = 2 \times 3 = 6$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{array}{r|l} f(x) & x^2 - 3x + 2 \\ \hline & q(x) \\ \hline -3x + 1 & \end{array} \Rightarrow f(x) = (x-2)(x-1)q(x) - 3x + 1$$

$$x=2 \Rightarrow f(2) = -5$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = -2$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(2) - f(1) = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$p(-1) = 0 \Rightarrow -1 - m(-1) + 2 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow p(x) = x^{17} + x^3 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^{17} + x^3 + 2 & x^2 + x + 1 \\ \hline & q(x) \\ \hline r(x) & \end{array} \Rightarrow x^{17} + x^3 + 2 = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$$

طرفین تساوی را در $x-1$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$(x-1)(x^{17} + x^3 + 2) = (x^2 - 1)q(x) + (x-1)r(x)$$

در طرفین تساوی این رابطه را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow (x-1)[x^2(x^3)^5 + (1) + 2] = (x-1)r(x) \Rightarrow r(x) = x^2 + 3 \xrightarrow{x^2 = -x-1} r(x) = -x + 2$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$P(x) \quad | \quad x-2$$

$$\Rightarrow P(2) = 0$$

چون $P(x)$ از درجه‌ی ۳ می‌باشد، بنابراین در تقسیم بر $x^3 - x$ خارج قسمت عددی خواهد داشت، داریم:

$$P(x) \quad | \quad x^3 - x$$

$$\quad \quad \quad k$$

$$\Rightarrow P(x) = k(x^3 - x) + 12$$

از طرفی داریم $P(2) = 0$ بنابراین:

$$P(2) = 0 \Rightarrow k(8 - 2) + 12 = 0 \Rightarrow 6k = -12 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow P(x) = -2(x^3 - x) + 12 \Rightarrow P(-2) = 24$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

بسط $(x+1)^6$ شامل جملات $x^0, x^1, \dots, x^6$ و بسط $(x+1)^{10}$ شامل جملات $x^0, x^1, \dots, x^{10}$ می‌باشد و در جمع همه‌ی این جملات، جمله‌های متشابه باهم جمع می‌شوند و در نهایت جمله‌های شامل $x^0, x^1, \dots, x^{10}$ را داریم که ۱۱ جمله است.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

در بسط $(3x-4y)^{13}$ هر جمله‌ی بسط یک ضریب ضرب در توانی از x و توانی از y می‌باشد. و اگر به جای x و y عدد ۱ قرار دهیم فقط ضرایب جملات باقی‌مانده و با هم جمع شده و مجموع ضرایب بسط به دست می‌آید، بنابراین برای یافتن مجموع ضرایب به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = (3-4)^{13} = (-1)^{13} = -1$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

در بسط $(a-b)^6$ داریم:

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$15(\sqrt{x})^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 15 \times x^2 \times \frac{1}{x^2} = 15$$

بنابراین در بسط $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ در جمله‌ی سوم بسط خواهیم داشت:

که این جمله مستقل از x است.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.

عدد ۹۸۰ پس از تجزیه برابر است با: $2^2 \times 5 \times 7^2$

ب.م.م دو عدد پس از تجزیه برابر است با حاصل ضرب پایه‌های مشترک با توان کوچک‌تر؛ پس داریم:

$$(a, b) = 2^{2k-2} \times 5^{m+2} \times 7^2 = 2^2 \times 5 \times 7^2 \Rightarrow \begin{cases} 2k-2=2 \Rightarrow k=2 \\ m+2=1 \Rightarrow m=-1 \end{cases} \Rightarrow m+k=1$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

ب.م.م سه عدد ۹۱ و ۱۴۳ و ۱۹۵ طول ضلع مکعب‌های مورد نظر می‌باشد. داریم:

$$\left. \begin{aligned} 91 &= 7 \times 13 \\ 143 &= 11 \times 13 \\ 195 &= 3 \times 5 \times 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (91, 143, 195) = 13$$

برای یافتن تعداد مکعب‌ها کافی است حجم مکعب مستطیل را بر حجم مکعب مذکور تقسیم کنیم. داریم:

$$n = \frac{91 \times 143 \times 195}{13 \times 13 \times 13} = 7 \times 11 \times 15 = 1155$$

صفحه ۲۴ کتاب

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر کارگر اول در a روز کار را تمام کند کارگر دوم در $a+10$ روز کار را تمام می‌کند. کارگر اول در هر روز $\frac{1}{a}$ و کارگر دوم در هر روز

$$\frac{1}{a+10} \text{ و هر دو در هر روز } \frac{1}{12} \text{ کار را تمام می‌کنند. داریم:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a+10+a}{a(a+10)} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12(2a+10) = a^2 + 10a$$

$$\Rightarrow a^2 - 14a - 120 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \text{ ق ق غ} \\ a = 20 \Rightarrow b = 20 + 10 = 30 \Rightarrow a + b = 50 \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ است.

معادله دو ریشه حقیقی دارد. $\Delta = (-2m)^2 - 4(1)(-1) = 4m^2 + 4 > 0 \rightarrow$

معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است. $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$x^2 + x + 1 = a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{دو ریشه حقیقی دارد} \\ a=1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{دو ریشه حقیقی دارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله مجموعاً ۴ ریشه حقیقی دارد.

۲۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$S = -3 \quad p = -2$$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{S^2 + S - 2p}{p} = \frac{9 - 3 + 4}{-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} x \leftarrow \text{ریشه معادله} \\ x^2 + mx - m - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$$

$$y \leftarrow \text{ریشه معادله جدید}$$

$$(y+2)^2 + m(y+2) - m - 1 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 + my + 2m - m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + (m+4)y + m+3 = 0 \Rightarrow x^2 + (m+4)x + m+3 = 0$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

α و β ریشه‌های معادله‌اند، بنابراین در معادله صدق می‌کنند. داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 1 \\ \beta^2 + 3\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 3\beta = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta + 2} = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2)} + \frac{1}{\beta(\beta^2 + 3\beta + 2)}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 2} + \frac{1}{\beta + 2} = \frac{\alpha + \beta + 4}{(\alpha + 2)(\beta + 2)} = \frac{\alpha + \beta + 4}{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4} = \frac{-3 + 4}{-1 - 6 + 4} = -\frac{1}{3}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \text{ ریشه‌های معادله جدید} \Rightarrow \begin{cases} \text{جدید } S = x_1 + x_2 = \alpha^2 - 1 + \beta^2 - 1 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2 = 9 - 2 - 2 = 5 \\ \text{جدید } P = x_1 x_2 = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = \alpha^2 \beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1 = 1 - 7 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادله جدید: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 5 = 0$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است.

نقطه‌ی M را روی خط $y = -2x + 1$ در نظر می‌گیریم.

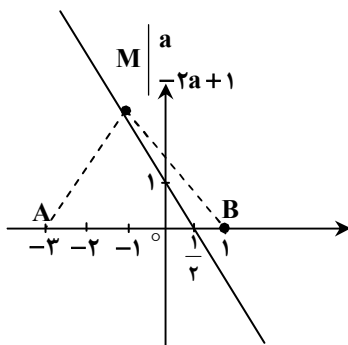
داریم:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(a+3)^2 + (-2a+1)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (-2a+1)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow 8a = -8 \Rightarrow a = -1$$

پس مختصات نقطه‌ی مذکور، (۳ و -۱) می‌باشد خواهیم داشت:

$$MO = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$



صفحه ۲۴ کتاب

۳۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y = x + \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x} = y \Rightarrow x^2 + 3 = yx \Rightarrow x^2 - yx + 3 = 0$$

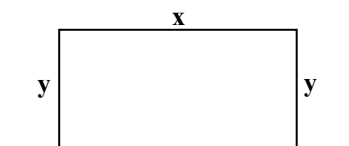
اگر خط $y = m$ از کم‌ترین مقدار تابع عبور کند بر آن مماس خواهد شد و بنابراین معادله‌ی محل برخورد $y = m$ و $x^2 - yx + 3 = 0$ دارای ریشه مضاعف است. داریم:

$$\begin{cases} x^2 - yx + 3 = 0 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow x^2 - mx + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{3} \\ m = -2\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

زیرا به‌ازای x ‌های مثبت مقادیر منفی y غیرقابل قبول نمی‌باشد.

صفحه ۱۸ کتاب

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.



$$x + 2y = 200 \Rightarrow y = \frac{200 - x}{2}$$

$$S = xy = x \left(\frac{200 - x}{2} \right) = 100x - \frac{x^2}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = 5000 \text{ به دست می‌آید. داریم: } -\frac{\Delta}{4a} \text{ بیش‌ترین مقدار این سهمی از رابطه‌ی } -\frac{\Delta}{4a}$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6 \Rightarrow -x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -6, x_1 = 12 \\ x_1 x_2 = m + 5 \Rightarrow (-6)(12) = m + 5 \Rightarrow m = -72 - 5 \Rightarrow m = -77 \end{cases}$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P = 9 - 2(-2) = 13 \\ x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS = (-3)^3 - 3(-2)(-3) = -45 \end{cases}$$

$$S = -\frac{b}{a} = -3 \quad P = \frac{c}{a} = -2$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{2}{x_1} \Rightarrow x_2^2 = \frac{4}{x_1^2} \\ x_1 = -\frac{2}{x_2} \Rightarrow x_1^2 = \frac{-4}{x_2^2} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{x_1^2} - \frac{4}{x_2^2} = x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + x_1^3 = 13 - 45 = -32$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ است.

شرط آن‌که نمودار تابع درجه‌ی ۲ به فرم $y = ax^2 + bx + c$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات بگذرد آن است که دو ریشه‌ی

مختلف‌العلامه داشته باشد، یعنی باید $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 1 - 8(m+1) > 0 \Rightarrow 1 - 8m - 8 > 0 \Rightarrow 8m < -7 \Rightarrow m < -\frac{7}{8} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2}{m+1} < 0 \Rightarrow m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \end{cases}$$

از اشتراک دو مجموعه‌ی فوق داریم: $m < -1$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1-x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1-x} + 1 - \sqrt{1-x}}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

با توجه به شرط دامنه فقط $x = \frac{4}{9}$ قابل قبول است. (دامنه: $0 < x < 1$)

۳۷- گزینه ۳ پاسخ است.

چون تساوی به ازای تمام مقادیر x برقرار است بنابراین کافی است برای یافتن A برای x یک مقدار دلخواه در نظر بگیریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{1-15}{1-3} + \frac{3}{3-1} = \frac{A}{1} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

راه حل دیگر:

$$\frac{15x-15}{x^2-3x} + \frac{3}{3-x} = \frac{15x-15-3x}{x(x-3)} = \frac{12(x-3)}{x(x-3)} = \frac{12}{x} = \frac{A}{x} \Rightarrow A=12$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\sqrt{3+\sqrt{x-x^3}} = \sqrt{3} \Rightarrow 3+\sqrt{x-x^3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x-x^3} = 0 \Rightarrow x-x^3 = 0 \Rightarrow x(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله ۱- و ۰ و ۱ هستند که مجموع آن‌ها برابر صفر می‌باشد.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\frac{|2x|-4}{|x|+2} \geq 0$$

با توجه به این که مخرج کسر همواره مثبت است کافی است داشته باشیم:

$$|2x|-4 \geq 0 \Rightarrow |2x| \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \\ \text{یا} \\ 2x \leq -4 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \rightarrow \text{شرط وجود جواب}$$

در محدوده فوق می‌توان طرفین تساوی را به توان ۲ رسانده داریم:

$$x+2 \leq (3-x)^2 \Rightarrow x^2-7x+7 \geq 0 \quad (x_1 = \frac{7-\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{21}}{2}) \Rightarrow x \in (-\infty, x_1] \cup (x_2, +\infty)$$

از طرفی $1 < x_1 < 2$ و $5 < x_2 < 6$ و با توجه به شرط وجود جواب، محدوده‌ی جواب $[-2, x_1]$ خواهد بود که شامل اعداد صحیح ۲- و ۱- و ۰ و ۱ خواهد بود.

۴۱- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به محدوده‌ی $x \geq 2$ عبارت $x-2$ منفی بوده و قرینه‌ی آن از قدر مطلق خارج می‌شود. داریم:

$$x^2 - (x-2) \leq 8 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0$$

x	-2	3
$x^2 - x - 6$	$+$	$-$

$$\Rightarrow x \in [-2, 3]$$

ولی با توجه به محدودیت موجود در صورت مسئله محدوده‌ی قابل قبول برای x بازه‌ی $[2, 3]$ خواهد بود.

۴۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$|x-2| \text{ و } \sqrt{x-1} \text{ همواره مثبت یا صفر هستند. داریم:}$$

$$\begin{cases} |x-2| \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow |x-2| + \sqrt{x-1} + 1 \geq 1$$

بنابراین عبارت سمت چپ معادله همواره مثبت بوده و به‌ازای هیچ مقداری از x برابر صفر نمی‌شود و معادله جواب ندارد.

راه حل دیگر: استفاده از نمودار

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

می‌دانیم $|x| = |x|$ بنابراین $|3-2x| = |2x-3|$ خواهیم داشت:

$$3 \leq |2x-3| \leq 6 \Rightarrow 2 \leq |2x-3| < 6 \Rightarrow |2x-3| < 3 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow 0 < 2x < 6 \Rightarrow 0 < x < 3$$

۴۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{شرط دامنه: } \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{3x+2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 12 \end{cases} \Rightarrow x \geq 12$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$3x+2 = x-2+9-6\sqrt{x-2} \Rightarrow 2x-3 = -6\sqrt{x-2}$$

$$\text{با توجه به شرط دامنه: } \begin{cases} x \geq 12 \Rightarrow 2x \geq 24 \Rightarrow 2x-3 \geq 21 \\ x \geq 12 \Rightarrow x-2 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 3 \Rightarrow -6\sqrt{x-2} \leq -18 \end{cases}$$

طرف سمت چپ معادله بزرگ‌تر یا مساوی ۲۱ و طرف سمت راست کوچک‌تر یا مساوی ۱۸- است، بنابراین معادله جواب ندارد.

۴۵- گزینه ۳ پاسخ است.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+

$$x \geq 2: x-2+x+1 \leq 5 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \quad (3)$$

 شامل ۶ عدد صحیح می‌شود. $\rightarrow (1) \cup (2) \cup (3) = [-2, 3]$ مجموعه جواب

راه حل دیگر:

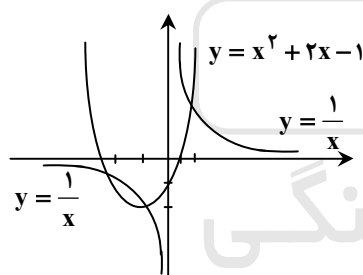
از رسم هندسی استفاده می‌کنیم. قسمتی از محور طول که در آن نمودار

$$y = |x-2| + |x+1| \text{ پایین‌تر یا مساوی خط } y = 5 \text{ باشد.}$$

$$x \leq -1: -x+2+(-x-1) \leq 5 \Rightarrow -2x+1 \leq 5 \Rightarrow -2x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \quad (1)$$

$$-1 \leq x \leq 2: -x+2+x+1 \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \quad (2)$$

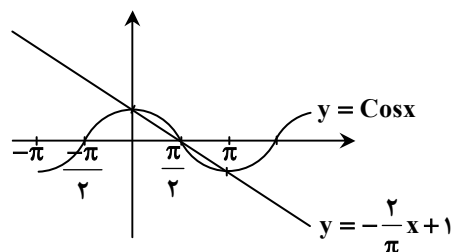
۴۶- گزینه ۳ پاسخ است.


 ابتدا معادله را به صورت $x^2 + 2x - 1 = \frac{1}{x}$ نوشته و محل برخورد نمودارهای

 $y = x^2 + 2x - 1$ و $y = \frac{1}{x}$ با روش رسم هندسی بررسی می‌کنیم.

این دو نمودار در ۳ نقطه یکدیگر را قطع کرده و معادله دارای ۳ جواب است.

۴۷- گزینه ۲ پاسخ است.


 ابتدا معادله را به فرم $\cos x = -\frac{2}{\pi}x + 1$ نوشته و محل‌های برخورد

 دو نمودار $y = \cos x$ و $y = -\frac{2}{\pi}x + 1$ را بررسی می‌کنیم.

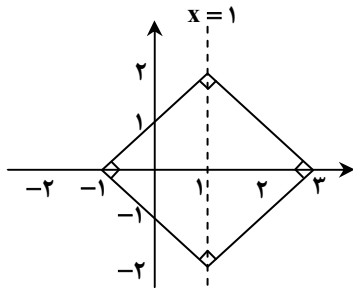
 این دو منحنی در سه نقطه به طول‌های ۰ و $\frac{\pi}{2}$ و π یکدیگر را قطع

 می‌کنند، ولی چون به‌ازای $x = 0$ مخرج کسر معادله اصل صفر می‌شود

 ریشه $x = 0$ غیرقابل قبول است و ریشه‌های $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \pi$ قابل

قبولند و معادله دارای ۲ ریشه است.

۴۸- گزینه ۲ پاسخ است.



$$(1) \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow x-1+y=2 \Rightarrow y=-x+3$$

$$(2) \begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \rightarrow x-1-y=2 \Rightarrow y=x-3$$

$$(3) \begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -x+1+y=2 \Rightarrow y=x+1$$

$$(4) \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \rightarrow -x+1-y=2 \Rightarrow y=-x-1$$

نمودار حاصل یک مربع به قطر ۴ می‌باشد که مساحت آن برابر $\frac{4 \times 4}{2} = 8$ می‌باشد.

۴۹- گزینه ۲ پاسخ است.

با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ خواهیم داشت:

$$\frac{t^2+1}{t} = 6t^2-4 \Rightarrow 6t^3-4t=t^2+1 \Rightarrow 6t^3-4t-2t=t^2+1-2t$$

$$\Rightarrow 6t(t^2-1)=(t-1)^2 \Rightarrow 6t(t-1)(t+1)=(t-1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6t(t+1)=t-1 \Rightarrow 6t^2+6t=t-1 \Rightarrow 6t^2+5t+1=0 \Rightarrow (3t+1)(2t+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}=-\frac{1}{3} & \text{غ ق} \\ t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=-\frac{1}{2} & \text{غ ق} \end{cases}$$



مؤسسه آموزشی فرهنگی