فصل ۷: ترکیبیات | **وقت پیشنهادی: ۲۵ دقیقه**

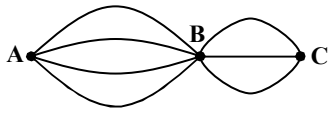
۱- چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می‌توان نوشت که در آن‌ها ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند؟

۱) ۳۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۷۲۰

۲- به چند طریق می‌توان به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داد به‌طوری‌که از ۵ سؤال اول حداقل به چهار سؤال پاسخ داد؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

۳- شکل زیر مسیرهای بین سه شهر A و B و C را نمایش می‌دهد. به چند طریق می‌شود از شهر A به شهر C رفت و دوباره به شهر A برگشت به‌طوری‌که مسیر برگشت با مسیر رفت به‌صورت کامل (یعنی در هر دو جاده) یکسان نباشد؟



۱) ۱۴۴ ۲) ۱۳۲ ۳) ۷۲ ۴) ۲۳

۴- چند عدد سه رقمی فرد متقارن داریم؟ (عدد سه رقمی متقارن عددی است که رقم یکان و صدگان آن یکسان باشد.)

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۴۵

۵- از بین ۸ کارمند یک اداره به چند طریق می‌توان ۴ نفر را به مأموریت فرستاد به‌طوری‌که از بین دو برادری که کارمند این اداره هستند، حداکثر یکی در مأموریت حضور داشته باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۰ ۳) ۵۵ ۴) ۱۱۲

۶- با اعداد ۳,۴,۱,۰,۰,۲,۲,۲ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $8!$ ۲) $\frac{7!}{2!}$ ۳) $\frac{8!}{3!3!}$ ۴) $\frac{7!}{2!3!}$

۷- با ارقام ۸، ۷، ۵، ۳ و ۰ بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۸- با ارقام ۳ و ۴ و ... و ۹ چند عدد چهار رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت که دوتا از رقم‌ها زوج و دو تا از رقم‌ها فرد باشند؟

۱) $۱۵\times۴!$ ۲) $۱۲\times۴!$ ۳) $۱۸\times۴!$ ۴) $۱۴\times۳!$

۹- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که مجموع دو رقم اوّل و آخر آن ۱۲ و مجموع دو رقم دیگر آن ۹ است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۷۰ ۴) ۴۰

۱۰- به چند روش می‌توان با حروف کلمه‌ی «سازندگی» کلمه‌های ۴ حرفی ساخت (بدون توجه به معنی کلمه) که حرف اول آن‌ها نقطه‌دار نباشد؟ (بدون تکرار حروف)

۱) ۶۰۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۳۰ ۴) ۶۴۰

۱۱- حروف کلمه‌ی «LAGRANGE» را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۱۲- حروف AAABBBCCC را به چند طریق می‌توان پیش هم چید به شرطی که هیچ یک از Aها پیش هم نباشند؟

۱) ۷۰۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۸۵۰

۱۳- با حروف کلمه‌ی SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه‌ی ۳ حرفی می توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد ؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۴- بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس آن واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۱۵- در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ مهره سیاه باشند؟

۱) ۵۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۶۴

۱۶- یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیرمجموعه‌ی $n-2$ عضوی دارد. n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ‌های تشریحی فصل ۷

۱- گزینه ۳ پاسخ است.

حالاتی‌که ۲ و ۳ کنار هم نیستند = حالاتی‌که ۲ و ۳ کنار هم هستند – کل حالات

$۶!-۵!\times۲=۷۲۰-۲۴۰=۴۸۰$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{پاسخ ۲ سؤال از ۵ سؤال دوم}}\ \underbrace{\binom{۵}{۵}}_{\text{پاسخ ۵ سؤال از ۵ سؤال اول}}\ \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{پاسخ ۳ سؤال از ۵ سؤال دوم}}\ \underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{پاسخ ۴ سؤال از ۵ سؤال اول}}=۵\times۱۰+۱\times۱۰=۶۰$$

فراموش نکنید که اگر جواب را به‌صورت $\binom{۵}{۴}\binom{۶}{۳}=۱۰۰$ می‌نوشتید یعنی به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ داده‌اید و به ۳ سؤال از ۵ سؤال دوم و یک سؤال باقی‌مانده از سری اول جواب می‌دهید، به نتیجه‌ی اشتباهی می‌رسیدید یعنی جواب تکراری تولید می‌شد. مثل:

سؤال سری اول = □ | ۵ | (۱) | (۲) | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

سؤال سری دوم = ( ) | ۴ | (۱) | (۲) | ۱ | ۲ | ۳ | ۵ |

در این وضعیت یک جواب را چند بار شمارش کرده‌اید که اشتباه است.

۳- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۱۷۹ الی ۱۸۲ کتاب

تعداد مسیرهای رفت $=۴\times۳=۱۲$

تعداد مسیرهای برگشت $=(۴\times۳)-۱=۱۱$

تعداد کل حالات رفت و برگشت $=۱۲\times۱۱=۱۳۲$

۴- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۸۱ کتاب

مساوی رقم یکان		
۱	۵	۱۰
	۱	۰
	۳	۱
	۵	۲
	۷	⋮
	۹	۹

$\rightarrow ۱\times۱۰\times۵=۵۰$

۵- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۱۸۶ الی ۱۹۰ کتاب

یکی از دو بردار به مأموریت برود: $\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۳}=۲\times\frac{۶!}{۳!\times۳!}=۴۰$

هیچ کدام در مأموریت حاضر نباشند: $\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{۲!۴!}=۱۵$

$\Rightarrow ۴۰+۱۵=۵۵$

راه حل دیگر: استفاده از متمم:

حالتی که هر دو برادر به مأموریت روند - تعداد کل حالات= تعداد حالات مطلوب

$$\binom{۸}{۴}-\binom{۶}{۲}\binom{۲}{۲}=۷۰-۱۵=۵۵$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

فرض می‌کنیم ارقام متمایز باشند: $\frac{۷!}{۲!}=\underbrace{\frac{۶\times۷!}{۳!\times۲!}}_{\text{جایگشت ارقام تکراری}}$

۶ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

دو حالت را در نظر می‌گیریم، یکی این‌که رقم آخر ۸ باشد و حالت دیگر این‌که رقم آخر صفر باشد.

رقم آخر ۸: ۳ (طریق) ۳ (طریق) ۱ (طریق) $\Rightarrow$ تعداد حالات $=۳\times۳\times۱=۹$

رقم آخر صفر: ۴ (طریق) ۳ (طریق) ۱ (طریق) $\Rightarrow$ تعداد حالات $=۴\times۳=۱۲$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد $=۹+۱۲=۲۱$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

در میان ارقام ۳ تا ۹، ۴ رقم فرد و ۳ رقم زوج می‌باشند. دو عدد فرد و دو عدد زوج انتخاب کرده در جایگشت آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۲}\times ۴! = ۱۸\times ۴!$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\overline{abcd} \rightarrow a+d=۱۲ \rightarrow (۹,۳),(۸,۴),\ldots,(۴,۸),(۳,۹) \rightarrow \text{۷ زوج مرتب}$$
$$b+c=۹ \rightarrow (۹,۰),(۸,۱),\ldots,(۱,۸),(۰,۹) \rightarrow \text{۱۰ زوج مرتب}$$
$$۷\times ۱۰ = ۷۰$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۱۷۷ کتاب

کلمه‌ی «سازندگی» از ۷ حرف ساخته شده است. برای ساخت یک کلمه‌ی ۴ حرفی که حرف اول، آن نقطه دار نباشد به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۴ ۵ ۶ ۴
○○○○

در خانه‌ی اول از سمت راست می‌توان حروف «س، ا، د، گ» را قرارداد:

پس طبق اصل ضرب $۴\times ۶\times ۵\times ۴ = ۴۸۰$ کلمه‌ی ۴ حرفی داریم که با حرف نقطه‌دار آغاز نمی‌شود (دقت کنید که وقتی حرف «ی» در اول کلمه قرار گیرد نقطه‌دار می‌شود).

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به مفروضات مسأله، باید حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند. برای این کار دو حرف A یعنی AA را یک مجموعه (یک شیء) در نظر می‌گیریم. همین‌طور دو حرف G یعنی GG را نیز یک مجموعه (یک شئ) در نظر می‌گیریم. این دو مجموعه (دو شئ) به اتفاق چهار حرف E و N و R و L تشکیل ۶ شئ می‌دهند که به ۶! طریق ۷۲۰ طریق می‌توانند جایگشت داشته باشند.

ضمناً دو حرف AA که تشکیل یک مجموعه می‌دهند، چون حروف مثل هم هستند، تنها ۱ طریق جابه‌جایی دارند. هم‌چنین دو حرف GG نیز که تشکیل یک مجموعه (یک شئ) می‌دهند، چون حروف مثل هم هستند، تنها ۱ طریق جابه‌جایی دارند.

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$-B-B-B-C-C-C- \qquad \binom{۷}{۳}\times \frac{۶!}{۳!۳!} = ۳۵\times ۲۰ = ۷۰۰$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

از بین حروف P , O , H باید دو حرف را انتخاب کرد ، سپس آن‌ها را در کنار هم چید : $\binom{۳}{۲}\times ۳! = ۱۸$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم که هر چهارضلعی از به هم وصل کردن چهار نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست به‌وجود می‌آید، یعنی برای ساختن هر چهارضلعی ۴ نقطه نیاز داریم که این چهار نقطه را از بین ۸ نقطه‌ی موجود انتخاب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد چهارضلعی‌ها} = \binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} = \frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۴!} = ۷۰$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۱۸۵ کتاب

چون قرار است حداقل ۲ مهره سیاه باشند یعنی یا ۲ مهره سیاه است و یک مهره به رنگ دیگر و یا هر ۳ مهره سیاه هستند پس داریم:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}+\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۲!۲!}\times\frac{۸!}{۷!۱!}+\frac{۴!}{۳!۱!} = ۶\times ۸+۴ = ۵۲$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\binom{n}{n-۲} = ۵۵ \Rightarrow \frac{n!}{[n-(n-۲)]!(n-۲)!} = ۵۵ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-n+۲)!(n-۲)!} = ۵۵ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲!} = ۵۵$$
$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۵۵}{۱} \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{طرفین وسطین}} n(n-۱) = ۱۱۰ \Rightarrow n(n-۱) = ۱۱\times ۱۰ \Rightarrow n = ۱۱$$