

جزوه کمک آموزشی ریاضی ۳

فصل ۱: پدیده‌های تصادفی و احتمال

وقت پیشنهادی: ۵۵ دقیقه

۱- ۳ رقم به طور تصادفی از بین ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ انتخاب می‌کنیم و با آن‌ها یک عدد سه رقمی زوج می‌سازیم (بدون تکرار ارقام) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این پدیده چند تاست؟

$$60 \text{ (۱)} \quad 52 \text{ (۲)} \quad 48 \text{ (۳)} \quad 100 \text{ (۴)}$$

۲- سکه‌ای را ۵ بار پرتاب می‌کنیم احتمال این که در پرتاب سوم پشت سکه ظاهر شود، چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{16} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{32} \text{ (۴)}$$

۳- در یک جامعه درصد گروه خونی افراد مطابق جدول زیر است. اگر سه نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این که حداقل یک نفر از آن‌ها گروه خونی AB داشته باشد، چقدر است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد	۴۰	۲۰	۱۰	۳۰

$$90/9 \text{ (۱)}$$

$$72/9 \text{ (۲)}$$

$$27/1 \text{ (۳)}$$

$$9/1 \text{ (۴)}$$

۴- احتمال این که همه بازیکنان یک تیم ۶ نفری والیبال در یک ماه سال متولد شده باشند، چقدر است؟

$$\frac{P(12,6)}{12^6} \text{ (۱)} \quad \frac{\binom{12}{6}}{12^6} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{12^6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{12^5} \text{ (۴)}$$

۵- در پرتاب دو تاس با هم احتمال این که مجموع اعداد رو شده بیش تر از ۴ باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{12} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{11}{12} \text{ (۴)}$$

۶- در جعبه‌ای A، ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، ۲ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده، یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این مهره قرمز رنگ باشد؟

$$\frac{5}{7} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{14} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{14} \text{ (۳)} \quad \frac{9}{14} \text{ (۴)}$$

۷- کدام گزینه در مورد پیشامدهای ناسازگار و مستقل از هم صحیح است؟

(۱) اگر A و B دو پیشامد غیر تهی مستقل از هم باشند، حتماً ناسازگار نیز هستند.

(۲) اگر A و B دو پیشامد غیر تهی ناسازگار باشند، حتماً مستقل از هم نیز می‌باشند.

(۳) اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، A' و B' نیز مستقل از هم هستند.

(۴) اگر A و B دو پیشامد غیر تهی ناسازگار باشند، A' و B' نیز حتماً ناسازگار هستند.

۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B \cup A) = \frac{3}{4}$ باشد، P(B) کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۴)}$$

۹- در یک خانواده‌ی سه‌فرزندی، می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است. با کدام احتمال حداقل یکی از فرزندان پسر می‌باشد؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{6}{7} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{7} \text{ (۴)}$$

۱۰- برای انجام مسابقه‌ای ۳ نفر از گروه ریاضی و ۵ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با چه احتمالی تعداد افراد انتخابی از دو رشته مساوی نیستند؟

$$\frac{2}{7} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{7} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{7} \text{ (۴)}$$

۱۱- احتمال انتقال یک بیماری ارثی به فرزند پسر خانواده ۲۰٪ و به فرزند دختر خانواده ۱۵٪ است. اگر این خانواده یک فرزند دختر و یک فرزند پسر داشته باشند، احتمال این که فقط یکی از آن‌ها دچار این بیماری شوند، چند درصد است؟

$$12\% \text{ (۱)} \quad 17\% \text{ (۲)} \quad 29\% \text{ (۳)} \quad 70\% \text{ (۴)}$$

۱۲- در جامعه‌ای نسبت زنان به مردان ۳ به ۲ می‌باشد. اگر ۶۰ درصد مردان و ۵۵ درصد زنان تحصیل کرده باشند، احتمال این که یک نفر انتخابی از این جامعه مرد یا تحصیل کرده باشد، چند درصد است؟

- (۱) ۹۷٪ (۲) ۷۳٪ (۳) ۸۴٪ (۴) ۲۴٪

۱۳- دو تاس را با هم می‌ریزیم. احتمال این که مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد و بزرگ‌تر از ۹ نباشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{11}{36}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۴- تاسی را چهار بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که اعداد رو شده متمایز باشند؟

- (۱) $\frac{15}{18}$ (۲) $\frac{7}{18}$ (۳) $\frac{13}{18}$ (۴) $\frac{5}{18}$

۱۵- در جامعه‌ای درصد افراد دارای گروه خونی O، ۳۰٪ است. اگر خانواده‌ای از این جامعه ۳ فرزند داشته باشد، با کدام احتمال سومین فرزند آن‌ها، دومین فرزند با گروه خونی O است؟

- (۱) $\frac{12}{6}$ ٪ (۲) $\frac{14}{7}$ ٪ (۳) $\frac{34}{3}$ ٪ (۴) $\frac{2}{7}$ ٪

۱۶- دو تاس را با هم می‌اندازیم. چقدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده عددی فرد باشد؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۷- هر یک از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۱۰ را روی یک کارت نوشته و کارت‌ها را در جعبه‌ای قرار می‌دهیم. اگر سه کارت به تصادف از جعبه بیرون بیاوریم، احتمال این که حاصل ضرب اعداد روی کارت‌ها عددی زوج شود، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{11}{12}$

۱۸- A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند و $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$. اگر احتمال به وقوع پیوستن A دو برابر احتمال به وقوع پیوستن B باشد، احتمال این که A رخ ندهد چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۹- پنج نفر در یک صف ایستاده‌اند. چقدر احتمال دارد که علی دقیقاً پشت سر رضا ایستاده باشد؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۲۰- تاسی را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ظاهر شده کم‌تر از ۳ باشد یک سکه را سه بار و اگر عدد ظاهر شده کم‌تر از ۳ نباشد سکه را یک بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲۱- هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها رخ ندهد» به کدام صورت بیان می‌شود؟

- (۱) $A' \cup B'$ (۲) $(A \cup B)'$ (۳) $(A - B) \cup (B - A)$ (۴) $A' \cup B$

۲۲- یک تاس سالم را دو بار پرتاب کرده و اعداد برآمده را به ترتیب جایگزین a و b در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + 6x + b = 0$ می‌کنیم. احتمال این که یکی از ریشه‌های این معادله (-۱) باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{36}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۳- ۳ سرباز و ۲ افسر به تصادف روی یک نیمکت کنار هم می‌نشینند. با چه احتمالی این افراد یک‌درمیان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال رخداد پیشامد A که در آن حداقل یک پسر داشته باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۲۵- در شهری ۴۰٪ مردان دارای موی قهوه‌ای، ۲۵٪ آنان دارای چشم قهوه‌ای و ۱۵٪ آنان دارای مو و چشم قهوه‌ای هستند. اگر مردی به تصادف از این شهر انتخاب شود احتمال این که چشم قهوه‌ای داشته باشد ولی موی قهوه‌ای نداشته باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{3}{20}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۲۶- احتمال قبولی علی در کنکور ۶۰ درصد و احتمال قبولی حسن در کنکور ۷۰ درصد است. با چه احتمالی حداقل یکی از آن‌ها در کنکور قبول می‌شود؟

- (۱) ۷۸٪ (۲) ۸۰٪ (۳) ۸۸٪ (۴) ۹۰٪

۲۷- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این که حداقل یک مهره آبی باشد، چند برابر احتمال آن است که هر سه مهره سبز باشند؟

- (۱) ۲ (۲) ۱۳ (۳) ۲۶ (۴) ۳۳

۲۸- اگر فضای نمونه‌ای، تمام اعداد دو رقمی زوجی باشد که با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ می‌توان نوشت (بدون تکرار)، تعداد اعضای آن چند عدد است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۲۹- در جعبه‌ای m مهره‌ی آبی و n مهره‌ی قرمز و k مهره‌ی سفید وجود دارد به‌طوری که $m = 3n$ و $k = 4n$. اگر یک مهره به تصادف از این جعبه خارج کنیم، احتمال قرمز نبودن آن چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳۰- در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شود. اگر برای آزمایش ۳ موش به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال از هر دو نوع موش سیاه و سفید در بین موش‌های انتخابی هست؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۳۱- در پرتاب تاس‌های سفید و سیاه پیشامد آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر از عدد تاس سیاه باشد چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۳۲- یک سکه‌ی سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد «آمدن بار اول رو» و B پیشامد «آمدن بار دوم پشت» باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) A و B ناسازگار ولی مستقلند. (۲) A و B ناسازگار و غیرمستقلند.
(۳) A و B هم سازگارند و هم مستقل. (۴) A و B سازگار و غیرمستقلند.

۳۳- در پرتاب دو تاس با هم احتمال این که مجموع دو تاس ۸ باشد یا هر دو زوج باشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{36}$ (۲) $\frac{9}{36}$ (۳) $\frac{5}{36}$ (۴) $\frac{11}{36}$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ‌های تشریحی فصل ۱

صفحه ۲ کتاب

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر رقم یکان عدد مزبور صفر باشد داریم: $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
اگر رقم یکان عدد مزبور ۲ یا ۴ باشد، داریم:

۲ یا ۴ به جز صفر

۴	۴	۲
---	---	---

$$S \text{ اعضای } = 5 \times 4 \times 1 + 4 \times 4 \times 2 = 20 + 32 = 52$$

نکته: اصل ضرب: اگر عملی با n_1 طریق مختلف، عمل دومی با n_2 طریق مختلف، عمل سومی با n_3 طریق مختلف و ... قابل انجام باشند، همگی این اعمال باهم به $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$ طریق مختلف قابل انجام هستند.
گزینه‌ی ۱: اگر به این نکته که صفر نمی‌تواند رقم سمت چپ عدد باشد، توجه نکنیم، به این گزینه می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$$

گزینه‌ی ۳: اگر دو حالت «صفر بودن رقم یکان» و «۲ یا ۴ بودن رقم یکان» را تفکیک نکنیم، به این گزینه می‌رسیم:

۴، ۲، ۰ به جز صفر

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 4 \times 4 \times 3 = 48$$

گزینه‌ی ۴: اگر به زوج بودن عدد توجه نکنیم، این گزینه را انتخاب خواهیم کرد:

به جز صفر

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 5 \times 5 \times 4 = 100$$

صفحات ۱۰ و ۱۱ کتاب

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

این که بار سوم پرتاب کدام طرف سکه ظاهر می‌شود، مستقل از پرتاب‌های قبل و بعد آن می‌باشد. لذا:

$$A = \{\text{پشت}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

$$S = \{\text{پشت، رو}\}$$

توجه کنید که در تست راجع به پرتاب‌های دیگر شرطی مطرح نشده است، لذا آن‌ها در محاسبه‌ی احتمال نقشی ندارند. اگر در سؤال مطرح می‌شد که: «احتمال این که فقط بار سوم پشت سکه ظاهر شود، چقدر است؟» آن وقت باید در نظر می‌گرفتیم که در چهار پرتاب دیگر باید

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

طرف روی سکه ظاهر شود و احتمال این پیشامد برابر می‌شد با:

نکته: پیشامدهای مستقل، پیشامدهایی هستند که رخداد یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد بقیه نداشته باشد.

گزینه‌ی ۳: اگر اشتباهاً در نظر بگیریم که از این ۵ پرتاب در ۳ پرتاب پشت سکه ظاهر می‌شود، این گزینه انتخاب خواهد شد:

$$\left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

گزینه‌ی ۴: اگر اشتباهاً پشت آمدن بار سوم را به معنی پشت نیامدن سایر پرتاب‌ها در نظر بگیریم (یعنی خودمان یک لفظ «فقط» به تست

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
رو پشت رو پشت رو

صفحات ۱۰ تا ۱۴ کتاب

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

متمم این پیشامد این است که هر سه دارای گروه خونی غیر AB باشند. یعنی:

$$P(A') = \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{729}{1000} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000} = 27.1\%$$

گزینه‌ی ۲: احتمال متمم پیشامد مطرح شده در تست است.

گزینه‌ی ۴: اگر احتمال خود پیشامد را بدون در نظر گرفتن تعداد هر حالت آن حساب کنیم (نمودار درختی) به این گزینه می‌رسیم.

$$\frac{10}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = 9.1\%$$

در حالی که باید این گونه حساب شود:

$$3 \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} + 3 \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} + 1 \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = 27.1\%$$

۴- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۱۰ تا ۱۴ کتاب

احتمال به دنیا آمدن یک نفر در یک ماه خاص برابر است با $\frac{1}{12}$ و مستقل از متولد شدن سایر افراد می‌باشد. لذا:

$$\text{احتمال این که هر ۶ نفر در فروردین متولد شده باشند: } \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12^6}$$

$$\text{احتمال این که هر ۶ نفر در اردیبهشت متولد شده باشند: } \frac{1}{12^6}$$

⋮

$$\text{احتمال این که هر ۶ نفر در اسفند متولد شده باشند: } \frac{1}{12^6}$$

+

$$12 \times \frac{1}{12^6} = \frac{1}{12^5}$$

نکته: قانون ضرب احتمالات برای پیشامدهای دوبه‌دو مستقل: اگر $A, B, C, \dots$ و ... پیشامدهایی باشند که دوبه‌دو مستقل از یکدیگرند، احتمال این که همه‌ی آن‌ها باهم رخ دهند یعنی $P(A \cap B \cap C \cap \dots)$ ، برابر است با:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \dots$$

گزینه‌ی ۱: این گزینه برابر احتمال این است که هیچ دو نفری از آن‌ها در یک ماه خاص (مثلاً خرداد) به دنیا نیامده باشند!

گزینه‌ی ۳: این گزینه نیز برابر احتمال این است که همه‌ی ۶ نفر در یک ماه خاص (مثلاً خرداد) به دنیا آمده باشند!

۵- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۶ تا ۹ کتاب

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴

مجموع دو تاس کوچک‌تر یا مساوی ۴

$$A' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)\} \Rightarrow P(A') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

توجه داریم که پیشامدهای «۲ بودن مجموع دو تاس» و «۳ بودن مجموع دو تاس» و «۴ بودن مجموع دو تاس» دوبه‌دو ناسازگارند، لذا

$$P(A') = \frac{1}{6} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ یعنی: آن‌ها با مجموع احتمالات آن‌ها.}$$

در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده حداقل ۲ و حداکثر ۱۲ می‌باشد. تعداد اعضای پیشامد A که در آن مجموع دو تاس برابر m باشد، با فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$n(A) = \begin{cases} m-1 & 2 \leq m \leq 7 \\ 13-m & 7 \leq m \leq 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A') = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6 \Rightarrow P(A') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

نکته: اگر A و B و C و ... پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند (یعنی اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد)، داریم:

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$

$$\text{گزینه‌ی ۱: این گزینه احتمال این است که مجموع دو تاس دقیقاً ۴ باشد: } \frac{4-1}{6 \times 6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

گزینه‌ی ۴: اگر متمم پیشامد A (مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴) را اشتباهاً A' (مجموع دو تاس کم‌تر از ۴) بگیریم (یعنی مساوی با ۴ را لحاظ نکنیم)، به این گزینه می‌رسیم:

$$n(A') = (2-1) + (3-1) = 2$$

$$P(A') = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

۶- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۴ کتاب

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \end{array} \begin{array}{l} \text{قرمز} \\ \text{قرمز} \end{array} \end{array}$$

$$p = \frac{3}{14} + \frac{2}{14} = \frac{5}{14}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۶ و ۱۰ کتاب

گزینه‌ی ۱: نادرست است. چون:

$B, A \rightarrow P(A) \neq \cdot, P(B) \neq \cdot$ غیر تهی اند

$B, A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \neq 0$ مستقل از هم هستند

در حالی که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم: $P(A \cap B) = 0$

گزینه‌ی ۲ نادرست است (مشابه دلیل فوق).

گزینه‌ی ۴ نیز نادرست است، چون:

ناسازگارند $B, A \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B)$$

که لزومی ندارد مخالف صفر باشد.

گزینه‌ی ۳ درست است، چون:

$B, A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$ مستقل از هم هستند

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A))$$

$P(A' \cap B') = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B') \Rightarrow A' \text{ و } B' \text{ نیز مستقل از یکدیگرند}$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن گاه A' و B' نیز مستقل از هم هستند.

A' و B نیز مستقل از هم هستند.

A و B' نیز مستقل از هم هستند.

۸- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۵ و ۱۰ کتاب

چون A و B مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} P(B)$$

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B) \Rightarrow \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

نکته:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$B, A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$ دو پیشامد مستقل از هم باشند.

۹- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۲ و ۵ کتاب

$$S = \{(d, p, p), (p, d, p), (p, p, d), (d, d, p), (d, p, d), (p, d, d), (d, d, d)\} \Rightarrow n(S) = 7$$

$$A' = \{(a, a, a)\} \Rightarrow n(A') = 1$$

$$P(A') = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گزینه‌ی ۱: اگر تست مشخص می‌کرد که کدام فرزند دختر است، این گزینه صحیح می‌شد.

گزینه‌ی ۲: متمم گزینه‌ی ۱ است.

گزینه‌ی ۴: متمم گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

۱۰- گزینہ ۳ پاسخ است. صفحات ۳ الی ۵ کتاب

اگر تعداد افراد انتخابی، از دو رشته مساوی باشند (یعنی ۲ نفر از گروه ریاضی و ۲ نفر از گروه تجربی انتخاب شوند)، داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3 \times 1 \cdot}{\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}} = \frac{3 \cdot}{7 \cdot} = \frac{3}{7}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

راه حل دیگر: بدون توجه به پیشامد متمم، می‌توانستیم احتمال پیشامد A را مستقیماً نیز محاسبه کنیم:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4}\binom{3}{0} + \binom{5}{3}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{5 + 10 \times 3 + 5 \times 3}{70} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

نکته: اگر A و A' دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} \quad P(A) = 1 - P(A')$$

در گزینه‌ی ۲: این گزینه متمم پیشامد مطلوب مسأله است.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۱۰ الی ۱۴ کتاب

اگر پسر بیمار و دختر سالم باشد، داریم:

$$\frac{20}{100} \times (1 - \frac{15}{100}) = \frac{20}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{17}{100}$$

اگر پسر سالم و دختر بیمار باشد، داریم:

$$(1 - \frac{20}{100}) \times \frac{15}{100} = \frac{80}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{12}{100} \Rightarrow \frac{17}{100} + \frac{12}{100} = \frac{29}{100} \rightarrow 29\%$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، A و B' و نیز B و A' نیز مستقل از هم هستند:

$$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) \quad , \quad P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: در این گزینه فقط احتمال سالم بودن پسر و بیمار بودن دختر لحاظ شده است.

گزینه‌ی ۲: در این گزینه فقط احتمال سالم بودن دختر و بیمار بودن پسر لحاظ شده است.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۵ الی ۹ کتاب

$$\frac{3}{2+3} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 60\% = \text{درصد زنان جامعه}$$

درصد مردان جامعه = ۴۰٪

$$P(\text{مرد و تحصیل کرده}) = P(\text{تحصیل کرده}) + P(\text{مرد}) - P(\text{تحصیل کرده یا مرد})$$

$$40\% + 57\% - 73\% = 24\%$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: اگر اشتراک مرد و تحصیل کرده بودن را کم نکنیم، به این گزینه می‌رسیم.

گزینه‌ی ۳: این گزینه احتمال زن یا تحصیل کرده بودن است.

گزینه‌ی ۴: این گزینه احتمال مرد و تحصیل کرده بودن است.

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۶ الی ۹ کتاب

در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده حداقل ۲ و حداکثر ۱۲ می‌باشد. پیشامد مطلوب مسأله این است که مجموع اعداد رو شده ۳، ۴، ۵، ۶ باشد:

$$A = \{(1,2), (2,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$

$$n(A) = 11 \quad P(A) = \frac{11}{36} = \frac{11}{36}$$

راه حل دیگر: در پرتاب دو تاس، اگر مجموع اعداد رو شده m باشد، تعداد حالات آن برابر است با:

$$n = \begin{cases} m-1 & 2 \leq m \leq 7 \\ 13-m & 7 \leq m \leq 12 \end{cases}$$

m = ۳ یا ۶ یا ۹

$$n = (3-1) + (6-1) + (12-9) = 2 + 5 + 4 = 11 \Rightarrow P = \frac{11}{36}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۲: اگر بزرگ‌تر از ۹ نبودن را لحاظ نکنیم، به این گزینه می‌رسیم.

گزینه‌ی ۳: اگر بزرگ‌تر از ۹ نبودن را معادل کوچک‌تر از ۹ بودن در نظر بگیریم (و مساوی با ۹ بودن را در آن لحاظ نکنیم)، به این گزینه می‌رسیم.

گزینه‌ی ۴: اگر در مضارب ۳، خود ۳ را در نظر نگیریم، به این گزینه می‌رسیم.

صفحات ۱۰ الی ۱۴ کتاب

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} n(S) = 6^4 \\ n(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

نکته: قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و برعکس. در گزینه ۳: این گزینه متمم پیشامد مطلوب مسأله است.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۱۰ و ۱۱ کتاب

از دو فرزند اول یکی باید گروه خونی O و دیگری گروه خونی غیره داشته باشد و نیز گروه خونی فرزند سوم هم باید O باشد، پس:

$$P = \frac{30}{100} \times (1 - \frac{30}{100}) \times \frac{30}{100} + (1 - \frac{30}{100}) \times \frac{30}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$P = \frac{63}{1000} + \frac{63}{1000} = 0.126 \xrightarrow{\times 100} 12.6\%$$

صفحات ۶ الی ۱۱ کتاب

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

مجموع اعداد رو شده به شرطی فرد است که یکی فرد و دیگری زوج باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال زوج بودن} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \text{احتمال فرد بودن} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

$$P = \frac{\overset{\text{فرد}}{\uparrow} \overset{\text{زوج}}{\uparrow} \overset{\text{زوج}}{\uparrow} \overset{\text{جایگشت زوج و فرد}}{\uparrow}}{2 \times 3 \times 3 \times 2} = \frac{1}{2}$$

صفحات ۴ الی ۸ کتاب

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.

حاصل ضرب سه عدد تنها در صورتی فرد است که هر سه فرد باشند:

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

صفحات ۱۰ الی ۱۴ کتاب

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B) = x \Rightarrow P(A) = 2P(B) = 2x$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2P(B) + P(B) - 2P(B)P(B)$$

$$\frac{4}{9} = 2x + x - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Delta = 9 - \frac{32}{9} = \frac{49}{9} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \frac{7}{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} > 1 \text{ غ ق} \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$P(A) = 2x = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

صفحات ۱۳ و ۱۴ کتاب

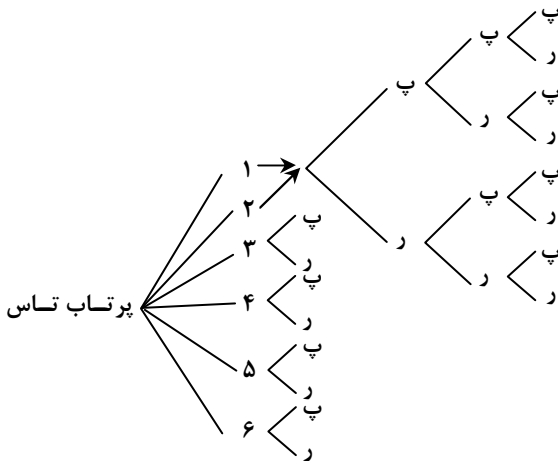
۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

علی و رضا را یک نفر در نظر می‌گیریم:

$$P(A) = \frac{1! \times 4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

صفحه ۲ کتاب

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.



$$n(S) = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{تاس ۱}}}{2} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{تاس ۲}}}{2} \right) + \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{تاس ۱}}}{4} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{تاس ۲}}}{2} \right) = 16 + 8 = 24$$

صفحه ۵ کتاب

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.

حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ ندهد یعنی A رخ ندهد یا B رخ ندهد.



$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$

صفحه ۳ کتاب

۲۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$n(S) = 36 \text{ در پرتاب دو تاس}$$

$$x = -1 \rightarrow a(-1)^2 + 6(-1) + b = 0 \rightarrow a - 6 + b = 0 \rightarrow a + b = 6$$

یعنی مجموع دو تاس باید ۶ باشد، پس:

$$A \text{ (مجموع دو تاس ۶)} = \{ (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

صفحه ۳ کتاب

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: اگر بخواهیم m شیء و n شیء متمایز به صورت یک‌درمیان کنار هم قرار گیرند تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} 2m!n! & m = n \\ m!n! & |m - n| = 1 \\ 0 & m \neq n, |m - n| \neq 1 \end{cases}$$

$$n(S) = 5! = 120$$

$$n(A) = 3! \times 2! = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

صفحه ۶ کتاب

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$n(S) = \underset{\substack{\text{فرزند اول} \\ 2}}{2} \times \underset{\substack{\text{سوم} \\ 2}}{2} \times \underset{\substack{\text{دوم} \\ 2}}{2} \times \underset{\substack{\text{چهارم} \\ 2}}{2} = 2^4 = 16$$

$$P \text{ (۴ پسر یا ۳ پسر یا ۲ پسر یا ۱ پسر)} = P \text{ (حداقل یک پسر)}$$

ثانیاً: راه حل اول ←

$$= \frac{\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{16} = \frac{4 + 6 + 4 + 1}{16} = \frac{15}{16}$$

راه حل دیگر:

$$P \text{ (حداقل یک پسر)} = 1 - P \text{ (هیچ پسری نداشته باشد)} = 1 - P \text{ (همه دختر باشند)} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۵ کتاب

موی قهوه‌ای : A

چشم قهوه‌ای: B

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.15 = 0.10 = \frac{1}{10}$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۰ کتاب

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.7$$

قبولی علی در قبولی حسن هیچ تأثیری ندارد، لذا A و B مستقل از همدند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۷ کتاب

۵	سبز
۴	آبی
۲	زرد

۱۱ مهره

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

$$P(A) = P(\text{سه آبی یا دو آبی یا یک آبی}) = P(\text{حداقل یک مهره آبی})$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{7}{2} + \binom{4}{2}\binom{7}{1} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$$

$$P(B) = P(\text{هر سه سبز}) = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165} = \frac{2}{33} \rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{26}{33}}{\frac{2}{33}} = 13$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۲ کتاب

رقم دهگان عدد دو رقمی نمی‌تواند صفر باشد.

رقم یکان عدد زوج هم باید عددی زوج باشد.

۵	۱
---	---

$$\rightarrow 5 \times 1 = 5$$

یا

۴	۲
---	---

$$\rightarrow 5 + 8 = 13$$

$$\rightarrow 4 \times 2 = 8$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۲ الی ۴ کتاب

$$\left. \begin{aligned} |S| = m + n + k = 3n + n + 4n = 8n \\ |A| = n \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n}{8n} = \frac{1}{8}, \text{ احتمال قرمز نبودن} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۴ و ۵ کتاب

پیشامد متمم پیشامد مطلوب مسأله این است که هر سه موش سفید باشند (بین آن‌ها موش سیاه نباشد) یا هر سه موش سیاه باشند (بین آن‌ها موش سفید نباشد):

$$P(A') = \frac{\binom{4}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 + 10}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

راه حل دیگر:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{6}$$

صفحه ۳ کتاب ۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

تاس اول را سفید و دومی را سیاه در نظر می‌گیریم:

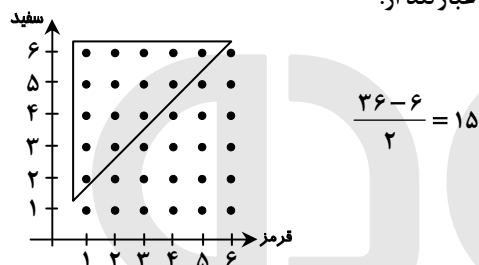
$$S = \{ (1, 1)(1, 2)(1, 3)\dots(1, 6) \\ (2, 1)(2, 2)(2, 3)\dots(2, 6) \\ (3, 1)(3, 2)(3, 3)\dots(3, 6) \\ \vdots$$

$$(6, 1)(6, 2)(6, 3)\dots(6, 6) \} n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{ (2, 1)(3, 1)(3, 2)(4, 1)(4, 2)(4, 3)(5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5) \}$$

$$n(A) = 15$$

راه حل دیگر: اگر زوج مرتب‌ها را روی محور نشان دهیم، زوج‌های بالای قطر اصلی عبارتند از:



۳۲- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۶ و ۱۰ کتاب

اولاً چون هر دو پیشامد می‌تواند هم‌زمان با هم اتفاق بیفتد یعنی «بار اول رو و بار دوم پشت بیاید» پس $A \cap B \neq \emptyset$ و A و B سازگارند. از طرفی:

$$S = \{ (ر, ر) (ر, پ) (پ, پ) (پ, ر) \}$$

$$P(\text{بار اول رو}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A)$$

$$P(\text{بار دوم پشت}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(B)$$

$$P(\text{بار اول رو و بار دوم پشت}) = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

یعنی A و B مستقلند.

نکته: البته بدون محاسبه نیز می‌توان گفت که احتمال وقوع سکه در بار اول در بار دوم هیچ تأثیری ندارد و A و B مستقل‌اند.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۸ کتاب

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \} \quad n(A) = 5$$

$$B = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \} \quad n(B) = 9$$

$$A \cap B = \{ (2, 6), (4, 4), (6, 2) \} \quad n(A \cap B) = 3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5+9-3}{36} = \frac{11}{36}$$