

وقت پیشنهادی: ۴۷ دقیقه

فصل ۲: مجموعه - ضرب دکارتی و رابطه

۱- اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ای توانی یک مجموعه‌ی k عضو، ۲۴۰ عضو بیش‌تر از تعداد عضوهای مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی $k-4$ عضو باشد، k کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۲- اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ی توانی دو مجموعه‌ی A و $A \times B$ برابر باشد، در این صورت:

- (۱) A تهی است. (۲) B تهی است. (۳) A تهی است یا B یک عضو دارد. (۴) B تهی است یا A یک عضو دارد.

۳- چند مورد از گزاره‌های زیر درست است؟

- (الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ (ب) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (ج) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (د) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$ (هـ) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۴

۴- حاصل $[(A \cap B) \cup A] \cup [(A \cup B) \cap A']$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) U (۴) $\emptyset$

۵- اگر $(A \cap B) \subset (A - B)$ باشد، آن‌گاه $B' - A'$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) B (۲) B' (۳) A (۴) A'

۶- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $(A \Delta B) \Delta A$ کدام گزینه است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $B - A$ (۴) $B \cap A$

۷- مجموعه‌های $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی مشترک دارند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۱

۸- اگر $A - B = \{1\}$ و $B - A = \{2\}$ باشد، مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۴

۹- در صورتی که $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و f یک رابطه در A به صورت زیر باشد، f کدام رابطه است؟

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 2)\}$$

- (۱) f بازتابی است ولی تراگذاری نیست. (۲) f بازتابی است ولی متقارن نیست. (۳) f نه تراگذاری و نه متقارن است. (۴) f یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۱۰- رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ تعریف شده است. اگر این رابطه تقارنی باشد ولی تراگذاری نباشد، دست‌کم چندعضوی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۷

۱۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$ و $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 \leq 1\}$ باشد و نمودار مختصاتی $A \times B$ را تشکیل دهیم، در این صورت $A \times B$ عبارت است از:

- (۱) دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز $(0, 0)$ (۲) دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ و به مرکز $(0, 0)$ (۳) مربعی به ضلع ۱ و به مرکز $(0, 0)$ (۴) مربعی به ضلع ۲ و به مرکز $(0, 0)$

۱۲- اگر $A = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ باشد، $P(A) - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

۱۳- حاصل عبارت $A - [(A \cup B) - (A \Delta B)]$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A - B$ (۳) A (۴) $\emptyset$

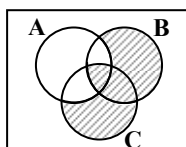
۱۴- اگر $A_i = \left[1 + \frac{1}{i}, 5 - \frac{1}{i}\right]$ باشد، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $[1, 5)$ (۳) $(1, 5]$ (۴) $[1, 5]$

۱۵- اگر $A_n = \left[n - \frac{1}{n}, n + \frac{5}{n}\right]$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^4 A_n$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $\left[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right]$ (۲) $\left[\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right] - \left\{\frac{7}{4}\right\}$ (۳) $\left[\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right]$ (۴) $\left[\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right]$

۱۶- قسمت هاشورخورده در نمودار ون زیر را نشان می‌دهد؟



- (۱) $(B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ (۲) $((B \cup C) \cap A') \cup ((B \cap C) \cap A)$ (۳) $(B - A) \cup (C - A) \cup ((B \cap C) \cup A)$ (۴) $A' \cap (B \cup C)$

۱۷- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 3, 7\}$ ، چند مجموعه مانند X می‌توان نوشت به طوری که: $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ ؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۴

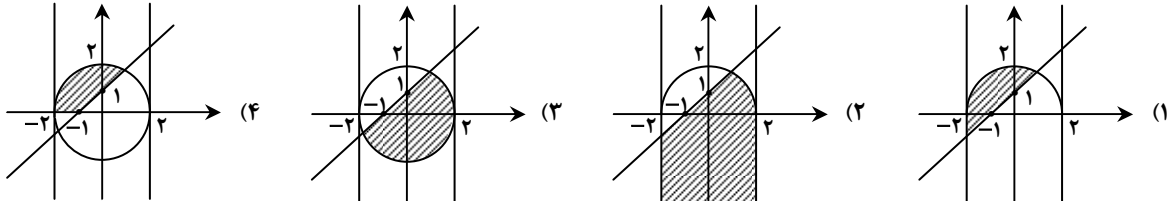
۱۸- اگر $A - B = A \cap B$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (U مجموعه مرجع است)

- (۱) $A \subseteq B$ (۲) $A \subseteq B'$ (۳) $A' = U$ (۴) $A = B'$

۱۹- اگر مجموعه A دارای ۷ عضو و مجموعه B دارای ۵ عضو و مجموعه $A \cup B$ دارای ۹ عضو باشند، مجموعه $(B - A) \times (A' \cup B)'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۲۰- نمودار رابطه $R = \{(x, y) \mid y \leq \sqrt{4-x^2}, y \geq x+1\}$ کدام است؟



۲۱- اگر رابطه R رابطه هم‌ارزی باشد و زوج مرتب $(5, 7)$ در R باشد، آن‌گاه R حداقل چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۲- اگر رابطه $R = \{(x, y) \mid 15 \mid x - y\}$ روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ هم‌ارزی باشد، تعیین کنید کلاس هم‌ارزی $[14]$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) رابطه هم‌ارزی نیست.

۲۳- تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ای ۱۴ واحد بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن می‌باشد، تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی برابر است با:

- (۱) ۲۱ (۲) ۳۵ (۳) ۱۵ (۴) ۲۸

۲۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با مجموعه جهانی U باشند، مجموعه $(A' \Delta B') \cup (A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A \Delta B$ (۴) U

۲۵- متمم مجموعه $(A' - B) - A$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) A' (۴) A

۲۶- چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که مضرب ۳ یا ۵ باشند؟

- (۱) ۴۲۰ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۱۳ (۴) ۴۱۴

۲۷- در یک نظرخواهی از ۱۰۰ دانش‌آموز ۶۰ نفر مجله A را می‌خوانند ۵۰ نفر مجله B را می‌خوانند و ۵۰ نفر مجله C را می‌خوانند، اگر ۳۰ نفر مجله A و B و ۲۰ نفر مجله C و B و ۴۰ نفر مجله A و C را بخوانند و ۱۰ نفر هر سه مجله را بخوانند چند نفر یک مجله را می‌خوانند؟

- (۱) صفر (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴) ۳۰

۲۸- رابطه $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 5), (4, 4), (2, 7), (1, 4), (5, 6)\}$ روی یک مجموعه 7 عضوی تعریف شده است حداقل چند عضو به R اضافه کنیم تا هم‌ارزی شود؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۲۲ (۳) ۳۶ (۴) ۳۲

۲۹- چند رابطه هم‌ارزی می‌توان در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تعریف کرد به طوری که: $3 \in R$ ، $5 \in [5]$ ، $1 \notin [4]$ ؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰- بر روی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند رابطه هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد به طوری که هر یک از آن‌ها دارای ۱۲ زوج مرتب باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) ۸۴ (۴) ۶

پاسخ‌های تشریحی فصل ۲

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

یک مجموعه‌ی k عضوی دارای 2^k عضو و مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی $(k-4)$ عضوی دارای 2^{k-4} عضو خواهد بود. داریم:

$$2^{k-4} + 240 = 2^k \Rightarrow 2^{k-4} + 240 = 2^{k-4} \times 2^4 \Rightarrow 2^{k-4} + 240 = 2^{k-4} \times 16$$

$$\Rightarrow 240 = 15 \times 2^{k-4} \Rightarrow 2^{k-4} = \frac{240}{15} = 16 \Rightarrow 2^{k-4} = 2^4 \Rightarrow k-4 = 4 \Rightarrow k = 8$$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$n(A) = n(A) \times n(B) \Rightarrow n(B)n(A) = n(A) \Rightarrow n(B)n(A) - n(A) = 0$$

$$\Rightarrow n(A)(n(B) - 1) = 0 \Rightarrow n(A) = 0 \text{ یا } n(B) = 1$$

بنابراین A تهی است و یا B یک عضو دارد.

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

قسمت‌های ۲ و ۳ و ۵ درست است.

۲) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\emptyset$ دقیقاً عضو $\{\emptyset\}$ می‌باشد.

۳) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه می‌باشد.

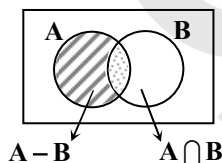
۵) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$ هر مجموعه، زیر مجموعه‌ی خودش است.

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

قانون جذب $(A \cap B) \cup A = A$

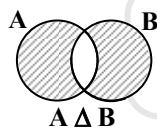
قانون شبه جذب $(A \cup B) \cap A' = B \cap A' = B - A$

$A \cup (B - A) = A \cup B$

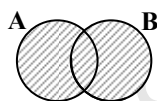


اگر به نمودار ون توجه کنید می‌فهمید که $A - B$ و $A \cap B$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، یعنی $A \cap B$ نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی $A - B$ باشد، مگر آن‌که $A \cap B = \emptyset$ باشد، پس داریم: $B' - A' = B' \cap A = A - B = A$

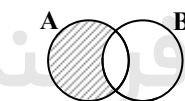
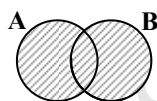
۵- گزینه ۳ پاسخ است.



۶- گزینه ۲ پاسخ است.



تفاضل متقارن ابتدا اجتماع دو مجموعه را به دست آورده و سپس اشتراک دو مجموعه را از آن کم می‌کند.



$$[(A \Delta B) \cup A = (A \cup B)] - [(A \Delta B) \cap A = (A - B)] = B$$

$$(A \cup B) - (A - B) = B$$

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

دو مجموعه‌ی A و B تنها ۴ عضو مشترک دارند که عبارتند از: ۱ و ۲ و ۳ و ۴. اگر بخواهیم زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مشترک A و B را به دست آوریم باید از بین این ۴ عدد، سه عدد را انتخاب کرده، در یک مجموعه‌ی جداگانه قرار دهیم. در نتیجه تعداد مجموعه‌های حاصل برابر خواهد بود با:

$$n = \binom{4}{3} = 4$$

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{1\} \\ B - A = \{2\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

پس این مجموعه نیز دارای دو عضو است.

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

f هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تراگذری را دارد، یعنی هر عضو با خودش در رابطه است، پس بازتابی دارد. به ازای هر زوج مرتبی، عکس آن نیز وجود دارد یعنی تقارنی دارد و خاصیت تراگذری هم نقض نمی‌شود، یعنی $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$ برقرار است.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

یک رابطه تنها زمانی می‌تواند تراگذری نباشد که دست کم دو عضو داشته باشد. زیرا خاصیت تراگذری یک خاصیت شرطی است که برای حصول فرض این رابطه‌ی شرطی دست کم دو زوج مرتب لازم است و به همین دلیل تمام روابط یک‌عضوی تراگذری‌اند!

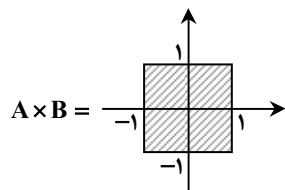
اما اگر هر رابطه‌ی دو‌عضوی شامل (x, y) و (y, x) که در آن $x \neq y$ می‌باشد را در نظر بگیریم این رابطه تراگذری نیست، زیرا:

$$(x, y) \in \mathbb{R}, (y, x) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, x) \notin \mathbb{R}$$

در نتیجه روی هر مجموعه‌ای که بیش از یک عضو داشته باشد، مانند مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ روابط دو‌عضوی به صورت فوق تقارنی‌اند، ولی تراگذری نمی‌باشند، به عنوان مثال $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ روی این مجموعه تقارنی است و تراگذری نیست.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

البته می‌توان با تعیین علامت به این جواب رسید:



$$x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$p(A)$ برای یک مجموعه‌ی n عضوی، 2^n عضو دارد، پس $p(A)$ برای این مجموعه ۳۲ عضو دارد و عضوهای مشترک $p(A)$ و A را حساب می‌کنیم.

$$\{1\} \subset A \Rightarrow \{1\} \in p(A)$$

$$\{2\} \subset A \Rightarrow \{2\} \in p(A)$$

$$\{1, 2\} \subset A \Rightarrow \{1, 2\} \in p(A)$$

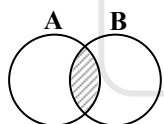
پس آن‌ها دارای ۳ عضو مشترک هستند، یعنی:

$$p(A) - A = 32 - 3 = 29$$

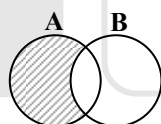
۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A - [(A \cup B) - (A \cap B)] = A - (A \cap B) = (A - A) \cup (A - B) = \emptyset \cup (A - B) = A - B$$

راه حل دیگر: نمودار ون:



$$(A \cup B) - (A \cap B) = A \cap B$$



$$A - (A \cap B) = A - B$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$i = 1 \Rightarrow A_1 = [2, 4]$$

$$i = 2 \Rightarrow A_2 = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

$\vdots$

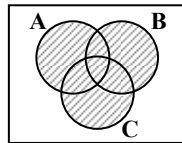
$$i \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{i}) = 1^+ \\ \lim_{i \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{i}) = 5^- \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (1, 5) \quad \text{اجتماع بازها}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

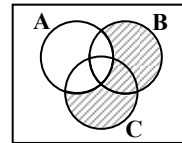
$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{5}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \\ A_2 &= \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \\ A_3 &= \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right] \\ A_4 &= \left[\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{n=1}^4 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right] \\ \bigcap_{n=1}^4 A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^4 A_n = \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

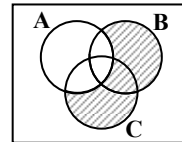
گزینه‌ی (۲) پاسخ مسأله است. نمودارهای ون سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:



گزینه‌ی ۳:



گزینه‌ی ۱:



گزینه‌ی ۴:

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

با توجه به این که $(A \cap B) \subseteq X$ ، مجموعه‌ی X باید عضوهای ۱ و ۳ را حتماً دارا باشد و با توجه به $X \subseteq (A \cup B)$ ، مجموعه‌ی X علاوه بر عضوهای اجباری ۱ و ۳ می‌تواند از عضوهای ۲ و ۴ و ۵ و ۷ هیچ یا یک یا دو یا سه و یا چهار عضو را شامل باشد. پس تعداد حالت‌های مختلف

X برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{2, 4, 5, 7\}$ یعنی $2^4 = 16$ عدد می‌باشد.

صفحات ۴۶ الی ۵۶ کتاب

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{aligned} A \cap B' &= A \cap B \xrightarrow{UB} (A \cap B') \cup B = (A \cap B) \cup B \\ (A \cup B) \cap (B' \cup B) &= B \\ (A \cup B) \cap U &= B \\ A \cup B = B &\Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

یعنی گزینه‌ی ۱ درست است.

اما:

$$\begin{aligned} A \cap B' &= A \cap B \xrightarrow{UB'} (A \cap B') \cup B' = (A \cap B) \cup B' \\ B' &= (A \cup B') \cap (B \cup B') \\ B' &= (A \cup B') \cup U \\ B' &= A \cup B' \Rightarrow A \subseteq B' \end{aligned}$$

یعنی گزینه‌ی ۲ نیز درست است.

و از $A \subseteq B$ و $A \subseteq B'$ نتیجه می‌گیریم که $A = \emptyset$ یعنی $A' = U$ ؛ پس گزینه‌ی ۳ نیز درست است، اما گزینه‌ی ۴ لزوماً برقرار نیست. راه حل بهتر:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \cap B \\ (A - B) \cap (A \cap B) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - B = A \cap B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset$$

لذا گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ صحیح است.

صفحات ۵۸ الی ۶۲ کتاب

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} |A| &= 7 \\ |B| &= 5 \\ |A \cup B| &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 7 + 5 - 9 = 3$$

$$B - A = B - (A \cap B) \xrightarrow{(A \cap B) \subseteq B} |B - A| = |B| - |A \cap B| = 5 - 3 = 2$$

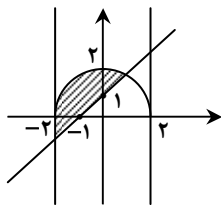
$$(A' \cup B)' = A \cap B' = A - B = A - (A \cap B) \Rightarrow |(A' \cup B)'| = |A| - |A \cap B| = 7 - 3 = 4$$

$$|(B - A) \times (A' \cup B)'| = |B - A| \times |(A' \cup B)'| = 2 \times 4 = 8$$

صفحات ۶۲ الی ۶۶ کتاب

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y \leq \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (I)$$



$$(II) \begin{cases} y < 0 \Rightarrow y \leq \sqrt{4-x^2} \text{ (چون عدد منفی همیشه از عدد غیرمنفی کوچک تر است).} \\ y \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 4-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

داخل نیم‌دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $r=2$ است.

$$(III) \xrightarrow{y \geq x+1} y = x+1 \text{ بالای خط}$$

نکته‌ی قابل توجه این است که در بالای محور x ها ($y > 0$) باید داخل دایره و بالای خط را هاشور
بزنیم؛ اما زیر محور x ها ($y < 0$) فقط باید بالای خط هاشور بخورد.

صفحات ۶۸ الی ۷۰ کتاب

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

R و $(\delta, \gamma) \in R \Rightarrow (\gamma, \delta) \in R$ تقارنی است

R و $(\delta, \gamma) \in R, (\gamma, \delta) \in R \Rightarrow (\delta, \delta), (\gamma, \gamma) \in R$ تعدی است

اگر رابطه‌ی R در مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، حداقل A باید دو عضو δ و γ را داشته باشد که در این صورت حداقل عضوهای R هم به صورت $(\gamma, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \gamma), (\gamma, \delta)$ خواهد بود (۴ عضو).

صفحات ۶۸ الی ۷۰ کتاب

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. چون:

$$\forall x \in A : 15 \mid x-x \Rightarrow xRx \text{ بازتابی دارد}$$

$$\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow 15 \mid x-y \Rightarrow x-y = 15k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x = 15(-k), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 15 \mid y-x \Rightarrow yRx \text{ تقارنی دارد.}$$

$$\forall x, y, z \in A : \begin{cases} xRy \Rightarrow 15 \mid x-y \Rightarrow x-y = 15k, k \in \mathbb{Z} \\ yRz \Rightarrow 15 \mid y-z \Rightarrow y-z = 15k', k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x-z = 15(k+k') = 15k'', k'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow 15 \mid x-z \Rightarrow xRz \text{ تعدی دارد.}$$

$$[14] = \{x \mid xR14\} \Rightarrow [14] = \{x \mid 15 \mid x-14\} = \{x \mid x-14 = 15k, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 15k + 14, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$1 \leq 15k + 14 \leq 200 \Rightarrow -13 \leq 15k \leq 186 \Rightarrow \frac{-13}{15} \leq k \leq \frac{62}{5}$$

$$\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, \dots, 12 \rightarrow 13 \text{ مقدار برای } k \Rightarrow [14] \text{ دارای } 13 \text{ عضو در } A \text{ است.}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\binom{n}{2} + 14 = \binom{n}{3} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + 14 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow 14 = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n-2}{3} - 1 \right) \Rightarrow 14 = \frac{n(n-1)(n-5)}{6}$$

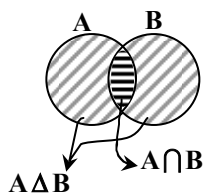
$$\Rightarrow n(n-1)(n-5) = 7 \times 6 \times 2 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow \binom{7}{4} = 35$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap (B')') \cup (B' \cap (A')') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

$$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B) = (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

همان‌طور که از روی شکل مشخص است $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$



$$(A \Delta B') \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

نکات:

$$A - B = A \cap B' - ۲$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) - ۱$$

$$A \cup B = B \cup A \text{ و } A \cap B = B \cap A - ۴$$

$$(A')' = A - ۳$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$X = (A' - B) - A = (A' \cap B') \cap A' = A' \cap B'$$

$$\Rightarrow X' = (A' \cap B')' = A \cup B$$

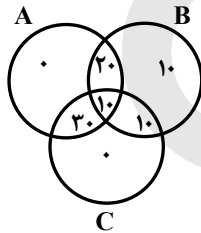
۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \left[\frac{999}{3} \right] - \left[\frac{99}{3} \right] = 300 \\ |B| = \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{99}{5} \right] = 180 \\ |A \cap B| = \left[\frac{999}{15} \right] - \left[\frac{99}{15} \right] = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 420$$

راه حل دیگر: تعداد جملات دنباله حسابی با قدرنسبت d از جمله a_m تا جمله a_n برابر است با: $\frac{a_m - a_n}{d} + 1$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ مضرب} : 102, 105, \dots, 999 \rightarrow \frac{999 - 102}{3} + 1 = 300 \\ 5 \text{ مضرب} : 100, 105, \dots, 995 \rightarrow \frac{995 - 100}{5} + 1 = 180 \\ 15 \text{ مضرب} : 105, 120, \dots, 990 \rightarrow \frac{990 - 105}{15} + 1 = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.



بهترین راه، رسم نمودار است:

تعداد افرادی که فقط در A یا فقط در B یا فقط در C هستند برابر است با: $10 + 0 + 0 = 10$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

چون $(1, 2)$ و $(2, 7)$ و $(3, 4)$ و $(4, 1)$ داخل رابطه اند پس این ۵ عضو حتماً هم کلاسند لذا در ابتدا آن‌ها را طناب پیچ می‌کنیم. همچنین چون $(5, 6)$ داخل رابطه است پس این ۲ عضو حتماً هم کلاسند لذا آن‌ها را هم طناب پیچ می‌کنیم. در واقع ما دارای ۲ عضو هستیم که برای آنکه کمترین زوج را داشته باشیم آن‌ها را در حداکثر کلاس‌های ممکن قرار می‌دهیم. لذا هر کدام از این گروه‌ها را در یک دسته قرار می‌دهیم لذا افراز متناظر با حداقل زوجها عبارتست از:

$$\{\{1, 2, 3, 4, 7\}, \{5, 6\}\}$$

که این رابطه دارای $2^2 + 5^2 = 29$ زوج است که چون ۷ زوج از قبل موجود است ما برای هم ارزی بودن رابطه لااقل به ۲۲ زوج دیگر نیاز داریم.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

۴ و ۵ را یک عضو در نظر می‌گیریم (طناب پیچ می‌کنیم) $\Rightarrow 4 \in [5] \Rightarrow$ ۴ و ۵ در یک مجموعه افراز

۲ و ۳ را یک عضو در نظر می‌گیریم (طناب پیچ می‌کنیم) $\Rightarrow 2 \in [3] \Rightarrow$ ۲ و ۳ در یک مجموعه افراز

۱ $\notin [4] \Rightarrow$ ۱ در مجموعه ۴ وجود ندارد

تعداد افرازهای مجموعه ۳ عضوی که ۱ در مجموعه $\{4, 5\}$ باشد - تعداد افرازهای مجموعه ۳ عضوی = تعداد مطلوب

تعداد افرازهای ۲ عضوی - تعداد افرازهای ۳ عضوی = تعداد مطلوب

$$3 - 2 = 1 = \text{تعداد مطلوب}$$

با توجه به نکات سؤال‌های قبل چون $(4, 5)$ داخل رابطه‌اند پس این ۲ عضو حتماً هم کلاسند، لذا ابتداءً آن‌ها را طناب پیچ می‌کنیم. همچنین چون $(2, 3)$ داخل رابطه‌اند پس این ۲ عضو هم، هم کلاسند لذا آن‌ها را هم طناب پیچ می‌کنیم. در واقع ما دارای ۳ عضو هستیم که ۱ نباید با

۴ و ۵ در یک کلاس باشد؛ لذا یا باید در کلاس ۲ و ۳ باشد، یا باید ۱ تنها باشد که در این صورت هم یا ۲ و ۳ و ۴ و ۵ در یک کلاسند یا مجزا

هستند لذا ۳ حالت خواهد داشت:

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}, \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

فرض می‌کنیم A به مجموعه‌های A_K افراز شود

$$R \text{ رابطه متناظر افراز } R : n(R) = (n(A_1))^2 + (n(A_2))^2 + \dots + (n(A_n))^2$$

عدد ۱۲ را نمی‌توان به صورت جمع چند مربع کامل نوشت به طوری که:

$$\begin{cases} 12 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_i^2 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i = 5 \\ \forall i : a_i \leq 3 \end{cases}$$

پس هیچ رابطه‌ی هم‌ارزی نمی‌توان با این ویژگی نوشت.

خریدار



مؤسسه آموزشی فرهنگی