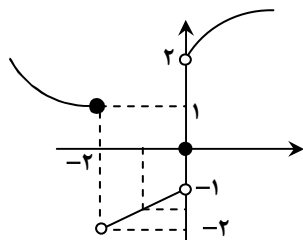


فصل ۳: حد و پیوستگی

وقت پیشنهادی: ۷۷ دقیقه

۱- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x+1) + f(x-1))$ کدام است؟



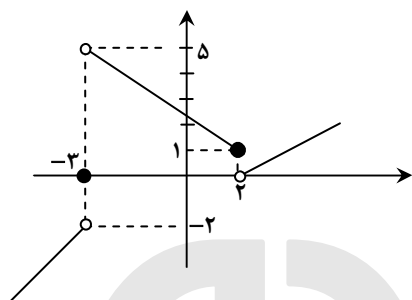
(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) -4

(۳) صفر

(۴) -2

۲- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(\frac{3}{1-x})$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -2

(۴) ۵

۳- تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 2b & x < 2 \\ ax^2 - 2bx + 3 & x \geq 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر حد راست این تابع در نقطه‌ی $x = 2$ از حد چپ آن ۳ واحد بیش‌تر باشد، کدام گزینه در مورد a و b درست است؟

(۴) $a + b = 0$

(۳) $b - a = 3$

(۲) $a - b = 3$

(۱) $a = b$

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{ax + b} = -2$ ، حاصل $a - b$ کدام است؟

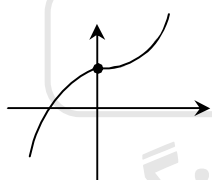
(۴) -4

(۳) -2

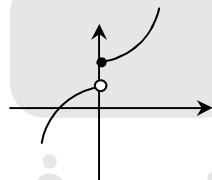
(۲) ۲

(۱) صفر

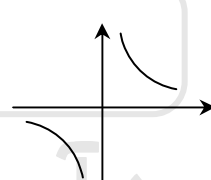
۵- کدام‌یک از توابع زیر در $x_0 = 0$ حد راست دارد ولی حد نمی‌باشد؟



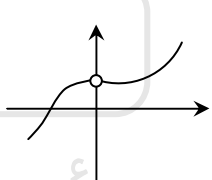
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۶- حد چپ تابع $f(x) = \begin{cases} 2a \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1 & x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{5}{a} - 3 \cot x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ، پنج واحد از حد راست آن تابع در همین نقطه بیش‌تر است. a کدام می‌باشد؟

(۴) فقط ۱

(۳) فقط ۵

(۲) ۱ یا -5

(۱) ۵ یا -1

۷- حاصل حد تابع $f(x) = \frac{x-1}{2x-6} - \frac{4x-6}{x^2-9}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

(۴) ∞

(۳) صفر

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-4x} - \sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-2x}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) -5

(۱) صفر

۹- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{1-3x}{ax^2-2bx+1} = -\infty$ ، حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰- اگر به ازای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ داشته باشیم $2 + \sec x \leq g(x) \leq 3 - 5x^2$ ، حد تابع $g(x)$ وقتی که $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -3 (۳) ۲ (۴) -2

۱۱- به ازای چه مقادیری از m و n چندجمله‌ای $f(x) = mx^3 + (3m-2n)x^2 - 4nx - 12$ بر چندجمله‌ای $x^2 + 5x + 6$ بخش پذیر است؟

- (۱) $\begin{cases} m = -3 \\ n = 2 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} m = 3 \\ n = -2 \end{cases}$

۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{2\cos x - 2\sin x}{1 - \cot x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\infty$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۳- حد تابع $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1+2x}}$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x \cos x - x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -1 (۳) صفر (۴) $\frac{1}{3}$

۱۵- حد چپ تابع $g(x) = \frac{|2-x|}{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$ در نقطه‌ی $x_0 = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) $-\frac{2}{\pi}$ (۳) ۱ (۴) -1

۱۶- حد راست تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ در نقطه‌ی $x = \pi$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) -1

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2f(x)+1} = 3$ ، حد تابع $g(x) = \frac{2f(x)+10}{f^2(x)-7}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) ۲ (۳) -1 (۴) ۱

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) $+\infty$

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+x^2 & x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) حد ندارد.

۲۰- چه تعداد از توابع زیر در $x = 0$ حد ندارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- $k(x) = \begin{cases} \sqrt{3} \tan(x - \frac{\pi}{3}) & x < 0 \\ 1 - 4 \cos x & x > 0 \end{cases}$ $h(x) = \sqrt{\sin x}$ $g(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ $f(x) = \frac{x}{|x|}$

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-2x}{x+1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{2-\sqrt{x+3}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۴ (۴) ۴

۲۴- a, b چند باشد تا چندجمله‌ای $f(x) = ax^2 - bx + 2$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x+1$ مساوی ۶ شود؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۲۵- اگر حد تابع $f+g$ در نقطه‌ی $x = x_0$ ، دو برابر حد تابع $f-g$ در این نقطه باشد، حد تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی $x = x_0$ کدام است؟

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$$

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) وجود ندارد.

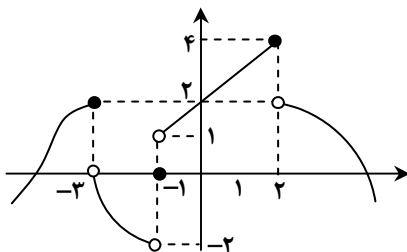
۲۷- اگر $f(\frac{x-5}{x+2}) = \sqrt{x+1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۲۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۹- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(|x|-4)$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) ۲

۳۰- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{ax + 2b - 1} = -4$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۳۱- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(2x+\pi)\cos x}{\sin x+1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{2-x}}{5x + \sqrt{x^2 - x}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۳۳- با فرض $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^n - x^2 + 1}{3x^n + x^3 + 2}$ کدام اعداد زیر می‌تواند باشد؟

$$۴ \text{ و } ۳ \quad (۴)$$

$$۴ \text{ صفر و } ۳ \quad (۳)$$

$$۴ \text{ صفر و } ۳ \text{ و } ۴ \quad (۲)$$

$$۳ \text{ صفر و } ۳ \quad (۱)$$

۳۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 5 - \sqrt{x^2 - x - 2})$ در کدام گزینه آمده است؟

$$+\infty \quad (۴)$$

$$-\infty \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۳۵- کدام یک از توابع زیر در $x = 2$ حد دارد ولی پیوسته نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(\frac{\pi}{2}x) - 1 & x \leq 2 \\ 1 - \tan(\frac{\pi}{8}x) & x > 2 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 2 \\ 4 - x^2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sin(\frac{\pi}{2}x)} & x \neq 2 \\ -1 & x = 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x^2 - 4} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases} \quad (۳)$$

۳۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 1 & x < -1 \\ 2ax - bx^2 - 2 & x \geq -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -1$ پیوسته باشد، $a + b$ کدام است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۱)$$

۳۷- کدام یک از توابع زیر در $x = 0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} \tan x + 2 & x \leq 0 \\ \frac{2 \tan^2 x}{1 - \cos 2x} & x > 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & x < 0 \\ 2x^2 + x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۳۸- اگر تابع $f(x) = \frac{1}{ax^2 - 4x + a}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

$$\mathbb{R} - (-2, 2) \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} - [-2, 2] \quad (۳)$$

$$(-2, 2) \quad (۲)$$

$$[-2, 2] \quad (۱)$$

۳۹- به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2-2|x|}{1+x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

$$-2 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۴۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} + a & |x| > 1 \\ 2bx - ax^2 + 1 & |x| \leq 1 \end{cases}$ همواره پیوسته باشد، حاصل $a - b$ کدام گزینه است؟

$$\text{همواره ناپیوسته است.} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

۴۱- اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_0$ پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر در این نقطه حتماً پیوسته است؟

$$|f(x)| \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2f(x) + 1} \quad (۳)$$

$$(f \circ f)(x) \quad (۲)$$

$$f(-x) \quad (۱)$$

۴۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{4x-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x < 1 \\ \cos(\pi x) & x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1-2x & x < 1 \\ 2x^2-1 & x \geq 1 \end{cases}$ ، چند تابع از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟

- (الف) $y = (f+g)(x)$ (ب) $y = (f-g)(x)$ (ج) $y = (f.g)(x)$ (د) $y = (\frac{f}{g})(x)$
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۴- تابع $g(x) = \cot x + \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ در بازه $(-4, 4)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۵- $a-b$ چند باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin 2x}{\sin 3x} & x \neq \pi \\ 1 - \frac{2b}{\tan^2 \frac{x}{3}} & x = \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \pi$ پیوسته باشد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۴۶- اگر تابع $g(x) = \frac{5x-3}{mx^2+kx+1}$ فقط در $x=2$ ناپیوسته باشد، حاصل $m+k$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$



مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ‌های تشریحی فصل ۳

۱- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۷۲ و ۷۳ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x+1) + f(x-1)) = f(0^+) + f(-2^+) = 2 + (-2) = 0$$

۲- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۷۲ و ۷۳ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{3}{1-x}\right) = f\left(\frac{3}{1-2^+}\right) = f\left(\frac{3}{(-1)^-}\right) = f((-3)^+) = 5$$

۳- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۷۲ و ۷۳ کتاب

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 2b) = 2a - 2b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 - 2bx + 3) = 4a - 4b + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a - 4b + 3 - (2a - 2b) = 3 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b$$

۴- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۸۴ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{ax + b} = \frac{1 + 2 - 3}{a + b} = \frac{0}{a + b}$$

چون حاصل $\frac{0}{a+b}$ باید برابر ۰ باشد، نتیجه می‌گیریم که $a+b$ نیز باید صفر باشد تا کسر به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در بیاید و پس از رفع ابهام، حاصل حد مساوی ۰-۲ شود:

$$\begin{aligned} a + b = 0 &\Rightarrow b = -a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{ax - a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{a(x-1)} = \frac{4}{a} = -2 \\ &\Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = -(-2) = 2 \Rightarrow a - b = -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۷۲ و ۷۳ کتاب

گزینه‌ی ۳: حد راست و حد چپ دارد اما با هم برابر نیستند.

گزینه‌ی ۱: در $x_0 = 0$ حد دارد.گزینه‌ی ۲: در $x_0 = 0$ حد ندارد ولی حد چپ و راست آن هم تعریف نشده است. (حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$)گزینه‌ی ۴: در $x_0 = 0$ هم حد دارد و هم پیوسته است.

۶- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۷۲، ۷۳ و ۷۹ الی ۸۱ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (2a \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1) = 2a \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2a \times \frac{1}{2} + 1 = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \left(\frac{\delta}{a} - 3 \cot x \right) = \frac{\delta}{a} - 3 \cot \frac{\pi}{2} = \frac{\delta}{a} - 0 = \frac{\delta}{a}$$

$$a + 1 - \frac{\delta}{a} = \frac{\delta}{a} \Rightarrow a - \frac{\delta}{a} = \frac{\delta}{a} \Rightarrow a^2 - 4a - \delta = 0 \Rightarrow (a - \delta)(a + 1) = 0 \quad \begin{cases} a = \delta \\ a = -1 \end{cases}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۸۴، ۸۹ و ۹۰ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-6} - \frac{4x-6}{x^2-9} \right) = \frac{2}{0} - \frac{6}{0} = \infty - \infty \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2(x-3)} - \frac{4x-6}{(x-3)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+3) - 2(4x-6)}{2(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 9}{2(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{0}{12} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-4x} - \sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-2x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-4x} - \sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-2x}} \times \frac{\sqrt{1-4x} + \sqrt{1-6x}}{\sqrt{1-4x} + \sqrt{1-6x}} \times \frac{\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-4x-1+6x}{1+4x-1+2x} \times \frac{\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-4x} + \sqrt{1-6x}} \right)$$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{3}$$

روش دیگر: استفاده از هم‌ارزی برنولی: $(1+u)^n \equiv 1+nu$
 $u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}} - (1-6x)^{\frac{1}{2}}}{(1+4x)^{\frac{1}{2}} - (1-2x)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} \times 4x - (1 - \frac{1}{2} \times 6x)}{1 + \frac{1}{2} \times 4x - (1 - \frac{1}{2} \times 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 3x}{2x + x} = \frac{1}{3}$$

چون حد تابع در نقطه‌ی $x_0 = \frac{2}{3}$ برابر $-\infty$ شده است، لذا باید حد چپ و حد راست تابع هر دو در این نقطه $-\infty$ شود، یعنی $x_0 = \frac{2}{3}$ باید ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد. (مخرج باید مربع کامل باشد تا حد چپ و راست بی‌نهایت‌های هم علامت شوند):

$$ax^2 - 2bx + 1 = 0$$

$$\Delta' = 0 \Rightarrow b^2 - a = 0 \Rightarrow a = b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{1-3x}{b^2x^2 - 2bx + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{1-3x}{(bx-1)^2} = \frac{-1}{(\frac{2}{3}b-1)^2} = -\infty \Rightarrow \frac{2}{3}b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a - b = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sec x) = 2 + \sec 0 = 2 + \frac{1}{\cos 0} = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \Delta x^2) = 3 - 0 = 3$$

پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -4m + 12m - 8n + 8n - 12 = 0 \Rightarrow 8m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$f(-3) = 0 \Rightarrow -27m + 27m - 18n + 12n - 12 = 0 \Rightarrow -6n - 12 = 0 \Rightarrow n = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x - 2 \sin x}{1 - \cot x} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{4}}{1 - \cot \frac{\pi}{4}} = \frac{2(\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2(\frac{\sqrt{2}}{2})}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(\cos x - \sin x)}{1 - \frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(\cos x - \sin x)}{\frac{(\sin x - \cos x)}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-2 \sin x) = -2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

صفحات ۹۱ الی ۹۲ کتاب

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt[3]{1+2x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt[3]{1+2x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \times \frac{1^2 + 1 \times \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}}{1^2 + 1 \times \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-1+x}{1-1-2x} \times \frac{1 + \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{-2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

صفحات ۸۵ الی ۸۸ کتاب

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x \cos x - x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{\cos x - 1}{\cos x})}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

صفحات ۸۵ الی ۸۸ کتاب

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{\tan(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\begin{aligned} 2-x = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2-\alpha \\ \alpha \rightarrow 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{\tan(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|\alpha|}{\tan(\frac{\pi}{2}(2-\alpha))} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\tan(\pi - \frac{\pi}{2}\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{-\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)} \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2}{-\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)} = \frac{-2}{\pi} \times 1 = \frac{-2}{\pi} \end{aligned}$$

صفحات ۸۵ الی ۸۸ کتاب

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2} = -\infty$$

صفحات ۷۴ الی ۷۶ کتاب

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2f(x)+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{2f(1)+1} = 3 \Rightarrow 2f(1)+1 = 9 \Rightarrow f(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)+10}{f^2(x)-7} = \frac{2f(1)+10}{f^2(1)-7} = \frac{8+10}{16-7} = \frac{18}{9} = 2$$

صفحات ۹۰ الی ۹۲ کتاب

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \frac{2-2}{\sqrt{4}-4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{0}{6} = 0$$

صفحات ۷۴ الی ۷۶ کتاب

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+x^2)\right) = f(3^-) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}-1)\right) = f(0^+) = 2(0) + 0^2 = 0$$

چون حد چپ و راست تابع $f \circ f(x)$ در $x=1$ با یکدیگر برابر نشدند، لذا این تابع در $x=1$ حد ندارد.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

پس تابع $f(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.

$$g(x) = \sqrt{1 - \cos x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sqrt{1 - 1} = 0$$

پس تابع $g(x)$ در $x = 0$ حد دارد.

$$h(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\sin x} = \sqrt{0^+} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\sin x} = \sqrt{0^-} \text{ تعریف نشده} \end{cases}$$

پس تابع $h(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.

$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{3} \tan(x - \frac{\pi}{3}) & x < 0 \\ 1 - 4 \cos x & x > 0 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = \sqrt{3} \tan(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$$

$$x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = 1 - 4 \cos 0 = 1 - 4 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -3$$

در نتیجه از بین توابع فوق، دو تابع حد ندارند.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^4}{\sin^4 \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 \times (-\cos^2 x)}{2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-2x}{x+1} = \frac{+2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{2 - \sqrt{x+3}} = \frac{\tan 0}{2 - \sqrt{4}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\tan(x-1)}{2 - \sqrt{x+3}} \times \frac{2 + \sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1) \times (2 + \sqrt{x+3})}{4 - x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1) \times (2 + \sqrt{x+3})}{-(x-1)} = \frac{2+2}{-1} = -4$$

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 &\Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow fa - 2b + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 &\Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 6 \Rightarrow a + b + 2 = 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$3a = 3 \Rightarrow a = 1 \quad b = 3 \Rightarrow a.b = 3$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

صفحات ۷۴ و ۷۵ کتاب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2$$

صفحه ۷۲ کتاب

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به جدول تعیین علامت تابع $y = x^2 + x$ ، متوجه می‌شویم که علامت این تابع در سمت چپ نقطه $x = 0$ منفی است و لذا تابع $y = \sqrt{x^2 + x}$ در سمت چپ نقطه $x = 0$ تعریف نشده است و در نتیجه حد چپ ندارد، پس تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$ در نقطه $x = 0$ حد چپ ندارد.

x	-1	0
$x^2 + x$	$+$	$-$

صفحه ۸۴ کتاب

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\frac{x-5}{x+3} = -1 \Rightarrow x-5 = -x-3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(-1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \sqrt{2}$$

صفحات ۹۰ تا ۹۲ کتاب

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} \left(1 + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}} = \frac{1+0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

صفحه ۷۲ و ۷۳ کتاب

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(|x| - 4) = f(|(-3)^-| - 4) = f(3^+ - 4) = f((-1)^+) = 1$$

نکته: $|(-3)^-| = 3^+$

صفحه ۸۴ کتاب

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{ax + 2b - 1} = \frac{3 + 2 - 5}{-a + 2b - 1} = \frac{0}{-a + 2b - 1}$$

چون حاصل این حد برابر صفر نیست (بلکه برابر عدد -4 می‌باشد)، لذا مخرج آن نیز باید مساوی صفر شود تا حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و پس از رفع ابهام به عدد -4 برسیم:

$$-a + 2b - 1 = 0 \Rightarrow a = 2b - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{2bx - x + 2b - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-5)}{(x+1)(2b-1)} = \frac{-8}{2b-1} = -4 \Rightarrow 2b-1 = 2 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a = 2b - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a - b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

صفحات ۸۶ و ۸۷ کتاب

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$x + \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(2x + \pi) \cos x}{\sin x + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t - \pi + \pi) \cdot \cos(t - \frac{\pi}{2})}{\sin(t - \frac{\pi}{2}) + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - t)}{-\sin(\frac{\pi}{2} - t) + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot \sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot \sin t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \times \frac{(\frac{t}{2})^2}{(\frac{t}{2})^2} \times \frac{t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot t}{\frac{t^2}{4}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{2-x}}{\Delta x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\Delta x + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\Delta x + |x|}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\Delta x + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\Delta x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = \frac{1}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x - x^2 + 1}{3x + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{\pm\infty} = 0$$

$$n=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^2 - x^2 + 1}{3x^2 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{11x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^3 - x^2 + 1}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^3}{4x^3} = 3$$

$$n \geq 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^n - x^2 + 1}{3x^n + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^n}{3x^n} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \Delta - \sqrt{x^2 - x - 2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - |x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 - 4 = 0 \\ 4 - x^2 & x \geq 2 \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع گزینه ۱ در نقطه ۲ هم حد دارد و هم پیوسته است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 & x \leq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0 - 1 = -1 \\ 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) & x > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

تابع گزینه ۲ در نقطه ۲ هم حد دارد و نه پیوسته است (پیوستگی چپ دارد).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x^2-4} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

تابع گزینه ۳ در نقطه ۲ هم حد دارد و نه پیوسته است (هیچ نوع پیوستگی هم ندارد).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)} & x \neq 2 \\ -1 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}x\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{\pi}{4} \times \frac{-\pi}{4}(x-2)}{-\pi \sin\left(\frac{-\pi}{4}(x-2)\right)} = -\frac{2}{\pi} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-2}{\pi} \end{cases}$$

تابع گزینه ۴ در نقطه ۲ هم حد دارد ولی پیوسته نیست. چون مقدار تابع در $x=2$ ، برابر ۱- است و برابر حد آن نیست.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax^2 - 2bx + 1) = a + 2b + 1 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2ax - bx^2 - 2) = -2a - b - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2b + 1 = -2a - b - 2 \Rightarrow 3a + 3b = -3 \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

۳۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (\tan x + 2) = f(0) = 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \tan^2 x}{1 - \cos^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan^2 x}{2 \sin^2 x} \times \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan^2 x}{x^2} \times \frac{x^2}{2 \sin^2 x} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته نیست.}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته نیست.}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

$$4) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 - bx + 1) = 0 - 0 + 1 = 1 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x) = 0 + 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته نیست.}$$

صفحه ۱۱۶ کتاب

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

شرط این که تابع گویا (کسری) در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، این است که مخرج آن ریشه نداشته باشد، پس:

$$\Delta' < 0 \Rightarrow 4 - a^2 < 0 \quad \begin{array}{c|cc} a & -2 & 2 \\ \hline 4-a^2 & - & + \end{array} \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 2 \Rightarrow a \in (\mathbb{R} - [-2, 2])$$

صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

۳۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-2|x|}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+2x}{1+x} = \frac{2+0}{1+0} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-2|x|}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-2x}{1+x} = \frac{2-0}{1+0} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2$$

صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

۴۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} + a & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 2bx - ax^2 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

تنها نقاطی که این تابع ممکن است در آن‌ها پیوسته نباشد، ریشه‌های مخرج و نقاط جدایی دو ضابطه (یعنی ۱- و $x=1$) می‌باشد، پس:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2b - a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2bx - ax^2 + 1) = 2b - a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-1}{x-1} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + a \right) = 2 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 2b - a + 1 = 2 + a \Rightarrow 2b - 2a = 1$$

از همین جا $a - b = -\frac{1}{2}$ معلوم می‌شود. اما چون در گزینه‌ها به‌ازای هیچ a و b ای پیوسته نمی‌شود وجود دارد، ادامه می‌دهیم.

$$f(-1) = -2b - a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2bx - ax^2 + 1) = -2b - a + 1 \Rightarrow -2b - a + 1 = a \Rightarrow 2b + 2a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + a \right) = \frac{0}{-2} + a = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b - 2a = 1 \\ 2b + 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = 0 \Rightarrow a - b = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

(۱) اگر $f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد، $f(-x)$ حتماً در $x = -x_0$ پیوسته است و معلوم نیست که در $x = x_0$ پیوسته باشد یا نه.
(۲) اگر $f(x)$ در $x = x_0$ و نیز $f(x)$ در $x = f(x_0)$ پیوسته باشد، $(f \circ f)(x)$ در $x = x_0$ پیوسته است و چون این‌جا در مورد شرط دوم چیزی گفته نشده، این گزینه نیز صحیح نمی‌باشد.

(۳) اگر $f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد و حد آن مساوی $\frac{-1}{2}$ نباشد، تابع $\frac{1}{2f(x)+1}$ نیز در $x = x_0$ پیوسته است و چون در این‌جا شرط دوم مطرح نشده، این گزینه نیز نادرست است.

(۴) تابع $|f(x)|$ در هر نقطه‌ای که تابع $f(x)$ پیوسته باشد، حتماً پیوسته است (گزینه‌ی صحیح). (دقت کنید برعکس این عبارت صحیح نمی‌باشد).
صفحه ۱۰۷ الی ۱۱۰ کتاب

۴۲- گزینه ۱ پاسخ است. می‌دانیم حد یک چند جمله‌ای، وقتی که متغیر به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند، برابر است با حد جمله‌ای از آن که بزرگ‌ترین درجه را دارد. پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{4x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{2} \times x^{\frac{1}{2}}}{2 \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \cos(\pi \times 1) = \cos \pi = -1$$

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 - 2(1) = -1$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) + g(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= 0 + (-1) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } (f+g)(x) \text{ پیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) - g(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1 - 1 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= 0 - (-1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } (f-g)(x) \text{ پیوسته نیست.}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1).g(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1 \times 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= 0 \times (-1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } (f.g)(x) \text{ پیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(1)}{g(1)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)} &= \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع } \left(\frac{f}{g} \right)(x) \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

پس سه تابع از بین توابع فوق در $x=1$ پیوسته است.

صفحات ۱۱۳ الی ۱۱۵ کتاب

۴۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$g(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$\begin{cases} 16-x^2 > 0 \Rightarrow -4 < x < 4 \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \end{cases}$$

این تابع در بازه‌ی $(-4, 4)$ تنها در نقاطی ناپیوسته است که $\sin x = 0$ ؛ یعنی در نقاط $x = k\pi$

k	۰	± 1	± 2
x	۰	$\pm \pi \approx \pm 3.14$	$\pm 2\pi \approx \pm 6.28$

پس تنها نقاط ناپیوستگی تابع g در بازه‌ی $(-4, 4)$ عبارت است از: $x = 0, \pm \pi$ یعنی سه نقطه.

۴۵- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۶ کتاب

$$f(\pi) = 1 - \frac{2b}{\tan^2 \frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{2b}{(\sqrt{3})^2} = 1 - \frac{2b}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{a \sin 2x}{\sin^3 x} \quad \begin{matrix} x - \pi = t \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pi + t \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \sin(2\pi + 2t)}{\sin^3(\pi + 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \sin 2t}{-\sin^3 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \sin 2t}{-\sin 2t} \times \frac{2t}{2t} \times \frac{2t}{2t} = \frac{-2}{3} a \Rightarrow 1 - \frac{2b}{3} = \frac{-2}{3} a \Rightarrow \frac{2}{3}(a - b) = -1 \Rightarrow a - b = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۶ کتاب

باید مخرج تابع دارای یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف) $x = 2$ باشد. پس:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow k^2 - 4m = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 4m + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1, 4m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow m + k = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی