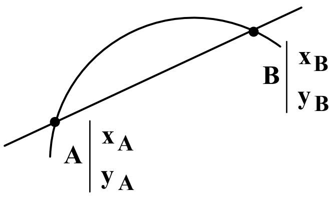
فصل پنجم

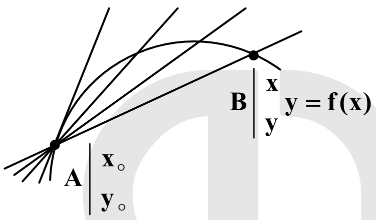
مشتق توابع

مشتق:

یادآوری: شیب خط واصل بین نقاط A و B عبارت است از: $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

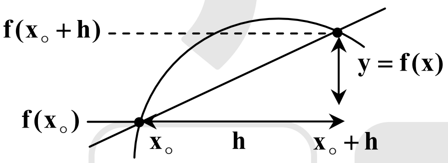


حال اگر بخواهیم معادله خط مماس بر تابع $y=f(x)$ را در نقطه A به‌دست آوریم کافی است، نقطه‌ی B را به نقطه‌ی A نزدیک کنیم. در لحظه‌ای که B به سمت A میل کند، خط قاطع به خط مماس تبدیل می‌شود، لذا می‌توان گفت شیب خط مماس بر تابع در نقطه‌ی A عبارت است از:



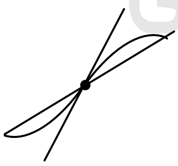
شیب خط مماس بر f در نقطه‌ی $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

این موضوع را با بیان دیگری نیز می‌توانیم مطرح کنیم:



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

لازمه وجود خط مماس بر تابع در اطراف یک نقطه اولاً وجود یک همسایگی در اطراف آن نقطه است ثانیاً باید تابع در آن نقطه پیوسته باشد. برای تابع ناپیوسته در نقطه‌ی ناپیوستگی شیب خط مماس معنا ندارد.



حال اگر حد مقابل موجود و متناهی باشد، به آن مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 می‌گویند.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر حد فوق موجود نباشد تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست

☜مثال: مشتق تابع $y=x^3+3x$ را در نقطه $x=1$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

✍ حل:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h^3+3h^2+3h)+(3+3h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+6)=6$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+4)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}x^2+x+4=6$$

مثال: مشتق تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نقطه $x=2$ با استفاده از تعریف بیابید.

حل:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h}=\frac{-1}{2\times 2}=\frac{-1}{4}$$

مثال: حد زیر را برای تابع $f(x)=x^2+2x$، با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

حل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$

$$=2\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+3\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}=2\times\lim_{H\to 0}\frac{f(1+H)-f(1)}{H}+3\lim_{H\to 0}\frac{f(1+H)-f(1)}{H}$$

$$=2\times f'(1)+3f'(1)=5f'(1)=5(2\times 1+2)=20$$

تابع مشتق:

اگر حد مورد تعریف را به‌جای آن که در نقطه x_0 تعریف کنیم، در تمامی نقاطی مانند x که مشتق تابع در آن نقاط موجود است، مورد محاسبه قرار دهیم به این تابع جدید که در هر نقطه مشتق تابع در آن نقطه را معین می‌کند، تابع مشتق می‌گویند.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دقت کنید که تابع مشتق را از تعریف دوم یعنی $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نمی‌توان محاسبه کرد.

این تعریف فقط برای محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه به کار می‌رود و تابع مشتق را نمی‌توان از روی آن به‌دست آورد. یعنی می‌توان $f'(x_0)$ را از این فرمول محاسبه کرد.

مثال: تابع مشتق توابع زیر را در دامنه‌ای که مشتق‌پذیرند، بیابید.

الف) $y=x^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{D=\mathbb{R}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\dots+h^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\dots+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\dots+\frac{h^n}{h}=nx^{n-1}$$

راه حل ۲:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1}+\dots+x^{n-1})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h((x+h)^{n-1}+\dots+x^{n-1})}{h}$$

$$=x^{n-1}+\dots+x^{n-1}=nx^{n-1}$$

ب) $y=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ج) $y=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{-h}}{x(x+h)}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

دقت کنید اگر بخواهیم از فرمول $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ استفاده کنیم مشتق در نقطه‌ی $x=a$ به‌دست می‌آید:

$$f'(a)=x\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{ax}=\frac{-1}{a^2}$$

مثال: مشتق تابع و تابع مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{Sin}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را در $x=0$ به‌دست آورید.

حل:

مشتق تابع:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{Sin}\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\operatorname{Sin}\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$$

تابع مشتق:

$$f'(x)=2x\operatorname{Sin}\frac{1}{x}+x^2\times(-\frac{1}{x^2})\operatorname{Cos}\frac{1}{x}=2x\operatorname{Sin}\frac{1}{x}-\operatorname{Cos}\frac{1}{x}$$

ملاحظه می‌شود که تابع مشتق برای $x=0$ مقدار معینی ندارد، یعنی ممکن است تابع در نقطه‌ای مشتق داشته باشد، اما تابع مشتق در آن نقطه تعریف شده نباشد.

مشتق راست، مشتق چپ:

اگر حد مورد بحث را از یک طرف بررسی کنیم، به آن مشتق راست یا مشتق چپ می‌گویند.

مشتق راست: $f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ مشتق چپ: $f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

شرط کافی برای آن‌که تابعی در اطراف یک نقطه مشتق‌پذیر باشد آن است که مشتق راست و چپ برابر داشته باشد. دقت کنید که شرط لازم مشتق‌پذیری، پیوستگی است.

در گزاره شرطی $p\to q$ به شرط آن‌که کل گزاره درست باشد، p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می‌نامند.

غلط است: مشتق‌پذیر است ← اگر تابع پیوسته باشد

درست است: پیوسته است ← اگر تابع مشتق‌پذیر باشد

مثال: مشتق راست و چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\le 1\\ -x^2+3 & x>1\end{cases}$$

تابع فوق در $x=1$ پیوسته است. پس مشتق‌پذیر است:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{x-1}}=-2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2\times 2=4$$

این تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق ندارد، لذا اگر بخواهیم تابع مشتق آن را با توجه به مثال قبل بیان کنیم باید بگوییم:

$$f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ -2x & x>1\end{cases}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x|$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$$

برای تعیین علامت قدرمطلق x را به سه حالت تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x>0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1 \\ x=0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1 \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1\end{cases} \\ x<0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{-x-h+x}{h}=-1\end{cases}$$

پس مشتق این تابع در $x>0$ همواره ۱ و در $x<0$ همواره ۱- است ولی در $x=0$ این تابع مشتق راست و چپ برابر ندارد. این نقطه را اصطلاحاً نقطه‌ی زاویه‌دار می‌نامند.

مشتق توابع مهم:

با مشتق برخی توابع آشنا شدیم:

الف) $f(x)=x^n \to f'(x)=nx^{n-1}$

ب) $f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

ج) $f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

د) $f(x)=C$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$$

هـ) $f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}} \to f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$

و) $f(x)=\text{Sin}x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\text{Sin}(x+h)-\text{Sin}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\text{Sin}\frac{x+h-x}{2}\text{Cos}\frac{x+h+x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\text{Sin}\frac{h}{2}\times\text{Cos}(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\text{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\text{Cos}(x+\frac{h}{2})=\lim_{h\to 0}\text{Cos}(x+\frac{h}{2})=\text{Cos}x$$

به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد:

$$f(x)=\text{Cos}x \to f'(x)=-\text{Sin}x$$

قضایای مشتق:

الف) $(kf(x))'=kf'(x)$

ب) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

اثبات:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)+g'(a)$$

ج) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

اثبات:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-fg(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)+f(a+h)g(a)-f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)(g(a+h)-g(a))+(f(a+h)g(a)-f(a)g(a))}{h}$$

$$=f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f(a)g'(a)+g(a)f'(a)$$

د) $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}$

اثبات:

$$f(x)=g(x)h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$$

$$h'(x)=\frac{f'(x)-g'(x)h(x)}{g(x)}\Rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)-g'(x)\frac{f(x)}{g(x)}}{g(x)}=\frac{\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)}}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}$$

نتیجه:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^{2}}$$

☜مثال: تابع مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=x^{3}+\sqrt{x}$

$$y'=3x^{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب) $y=\frac{x^{5}+1}{x}$

$$y=x^{4}+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=4x^{3}-\frac{1}{x^{2}}$$

ج) $y=x^{3}\sqrt{x}$

$$y=x^{3}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{2}}\to y'=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}=\frac{7}{2}\sqrt{x^{5}}$$

د) $y=\frac{1}{x^{2}}$

$$y=x^{-2}\to y'=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^{3}}$$

هـ) $y=\frac{x^{2}}{x-1}$

$$y=\frac{2x\times(x-1)-x^{2}}{(x-1)^{2}}=\frac{x^{2}-2x}{(x-1)^{2}}$$

راه حل ۲:

$$y=\frac{x^{2}-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}\rightarrow y'=1-\frac{1}{(x-1)^{2}}$$

و) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$y'=\frac{\sqrt{x+1}-x\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\frac{2(x+1)-x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

ز) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}$

$$y'=\frac{(\sqrt{x}+2)-x(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(\sqrt{x}+2)^{2}}=\frac{\sqrt{x}+2-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}+2)^{2}}=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}+4}{2(\sqrt{x}+2)^{2}}=\frac{\sqrt{x}+4}{2(\sqrt{x}+2)^{2}}$$

ح) $y=\dfrac{2}{x^{3}-1}$

$$y'=\frac{-2(3x^{2})}{(x^{3}-1)^{2}}=\frac{-6x^{2}}{(x^{3}-1)^{2}}$$

ط) $y=\mathrm{Sin}x(1+\mathrm{Cos}x)$

$$y'=\mathrm{Cos}x(1+\mathrm{Cos}x)+\mathrm{Sin}x(-\mathrm{Sin}x)=\mathrm{Cos}^{2}x+\mathrm{Cos}x-\mathrm{Sin}^{2}x=\mathrm{Cos}2x+\mathrm{Cos}x$$

ی) $y=\dfrac{x\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x}$

$$y'=\frac{(\mathrm{Sin}x+x\mathrm{Cos}x)(\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x)-(x\mathrm{Sin}x)(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Sin}x)}{(\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x)^{2}}$$

$$y'=\frac{\mathrm{Sin}^{2}x+x\mathrm{Cos}^{2}x+\mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}x+x\mathrm{Sin}x\cancel{\mathrm{Cos}x}-\cancel{x\mathrm{Sin}x}\mathrm{Cos}x+x\mathrm{Sin}^{2}x}{(\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x)^{2}}=\frac{x(\mathrm{Sin}^{2}x+\mathrm{Cos}^{2}x)+\mathrm{Sin}^{2}x+\mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}x}{(\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x)^{2}}$$

$$=\frac{x+\mathrm{Sin}^{2}x+\mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}x}{(\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x)^{2}}$$

ک) $y=\dfrac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^{2}+5x}}$

$$y=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x}\sqrt{x+5}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

مشتق $\mathrm{Cot}x,\tan x$:

$$y=\tan x=\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}\Rightarrow y'=\frac{\mathrm{Cos}x.\mathrm{Cos}x+\mathrm{Sin}x.\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}^{2}x}=\frac{1}{\mathrm{Cos}^{2}x}=(1+\tan^{2}x)$$

به‌طور مشابه:

$$y=\mathrm{Cot}x\rightarrow y'=-(1+\mathrm{Cot}^{2}x)=\frac{-1}{\mathrm{Sin}^{2}x}$$

مثال: مشتق تابع زیر را حساب کنید.

حل:

$$y=\frac{Cosx+Sinx}{Cosx-Sinx}$$

صورت و مخرج را بر Cosx تقسیم می‌کنیم.

$$y=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$y'=1+\tan^2(x+\frac{\pi}{4})$$

مشتق تابع مرکب:

مشتق تابع مرکب در حالت کلی عبارت است از:

$$y=f(g(x))\ \to\ y'=g'(x)f'(g(x))$$

یا $y=f(u)\ \to\ y'=u'\times f'(u)$

مثلاً:

$$y=u^n\ \to\ y'=nu^{n-1}\times u'$$

$$y=\sqrt[n]{u^m}\ \to\ y'=\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}\times u'$$

$$y=Sinu\ \to\ y'=u'Cosu$$

$$y=Cosu\ \to\ y'=-u'Sinu$$

$$y=\tan u\ \to\ y'=u'(1+\tan^2 u)$$

$$y=Cotu\ \to\ y'=-u'(1+Cot^2u)$$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=\sqrt{x^2-2x}$

$$\to\ y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

ب) $y=(x^3+x-1)^4$

$$\to\ y'=4u^3u'$$

$$y=4(x^3+x-1)^3(3x^2+1)$$

ج) $y=Sin3x$

$$\to\ y=u'Cosu$$

$$y'=3Cos3x$$

د) $y = x\tan\frac{x}{۲}$

$$y' = \tan\frac{x}{۲} + x\left(\frac{۱}{۲}\left(۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)\right)$$

هـ) $y = \mathrm{Sin}^{۳}۲x$

$$y' = ۳\mathrm{Sin}^{۲}۲x.۲\mathrm{Cos}۲x = ۶\mathrm{Sin}^{۲}۲x\mathrm{Cos}۲x$$

و) $y = \mathrm{Sin}x^{۲}$

$$y' = ۲x \times \mathrm{Cos}x^{۲}$$

ز) $y = \sqrt{۱+\mathrm{Sin}^{۲}x} \rightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

$$y' = \frac{۲\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x}{۲\sqrt{۱+\mathrm{Sin}^{۲}x}}$$

ح) $y = \mathrm{Sin}\sqrt{۱+x^{۲}}$

$$y' = \frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^{۲}}} \times \mathrm{Cos}\sqrt{۱+x^{۲}}$$

ط) $y = \mathrm{Sin}\frac{۱}{x}$

$$y = -\frac{۱}{x^{۲}}\mathrm{Cos}\frac{۱}{x}$$

ی) $y = \sqrt{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}} \rightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

$$y' = \frac{\frac{۲x(۱+x^{۲}) - x^{۲}(۲x)}{(۱+x^{۲})^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}}} = \frac{\frac{۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}}} = \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}\sqrt{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}}}$$

نقاطی که در آن تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

الف) نقاط ناپیوستگی تابع:

مثلاً توابع براکتی که عبارت داخل براکت عدد صحیح می‌شود مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

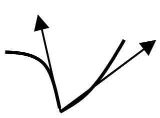
☜مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x[۲x+۱]$ را حول نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی کنید.

✍ حل:

$$f'_{+}(۱) = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{x[۲x+۱]-۳}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{۳x-۳}{x-۱} = ۳$$

$f'_{-}(۱) = \lim_{x\to ۱^{-}} \frac{x[۲x+۱]-۳}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{-}} \frac{۲x-۳}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{-}} = \frac{-۱}{x-۱} =$ وجود ندارد.

ب) اگر تابع در نقطه‌ای به طول a پیوسته باشد و مشتق راست و چپ نابرابر داشته باشد نیز در این نقطه مشتق‌ناپذیر است. (نقطه‌ی زاویه‌دار)



تذکر : مشتق لااقل از یک طرف باید متناهی باشد.

نکات:

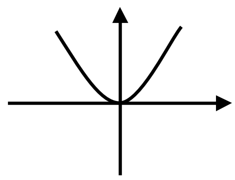
۱) ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق طول نقطه‌ی زاویه‌دار است یعنی در توابعی به فرم $f(x)=|x-a|g(x)$ به شرط آن‌که $g(a)\neq 0$، $x=a$ طول نقطه‌ی زاویه‌دار است.

۲) ریشه‌های مکرر داخل قدرمطلق طول نقطه‌ی زاویه‌دار نمی‌باشند. مانند: $f(x)=|(x-a)^n|$ برای $n>1$

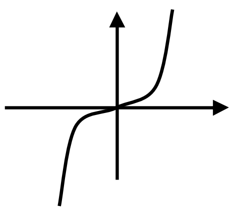
همچنین است اگر $x=a$ ریشه عبارت پشت قدرمطلق باشد. یعنی: $g(a)=0$ مانند: $y=(x-a)|x-a|$

مثلاً در توابع زیر $x=0$ طول نقطه‌ی زاویه‌دار نمی‌باشد:

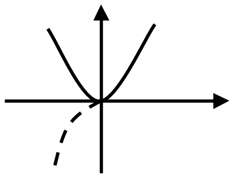
$y=x^2|x|$



$y=x|x|$



$y=|x^3|$



☜مثال: توابع زیر در چند نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشند؟

الف) $f(x)=|x^3|+|x^3-2x^2+x|$

$f(x)=|x^3|+|x(x-1)^2|$

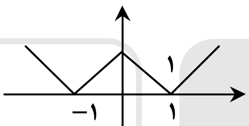
چون $x=0$ برای قدرمطلق دوم ریشه‌ی ساده محسوب می‌شود، لذا نقطه‌ی زاویه‌دار است و جمع یک تابع مشتق‌پذیر و یک تابع مشتق‌ناپذیر، مشتق‌ناپذیر است.

ب) $f(x)=||x|-1|$

چون این‌جا دو قدرمطلق موجود است، لذا ریشه‌های ساده هر دو طول نقاط زاویه‌دار است.

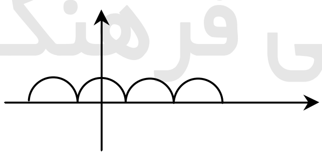
$|x|=1 \rightarrow x=\pm 1$

هم‌چنین $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدرمطلق است، پس $x=0$ نیز زاویه‌دار است.



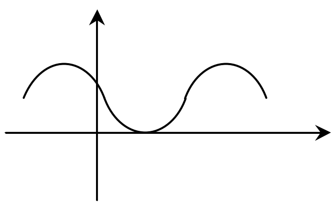
ج) $f(x)=|\cos x|$

تابع $y=\cos x$ در نقاط $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ دارای ریشه‌ی ساده است، یعنی محور x ها را قطع می‌کند و لذا این نقاط زاویه‌دار محسوب می‌شوند.



د) $f(x)=|1-\sin x|$

معادله‌ی $\sin x=1$ دارای ریشه‌ی مضاعف می‌باشد، پس منحنی $1-\sin x$ بر محور xها مماس است و لذا نقاط: $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ زاویه‌دار محسوب نمی‌شود.



تعبیر ریاضی و فیزیکی مشتق:

تعبیر فیزیکی: اگر $f(t)$ معادله حرکت متحرکی باشد و تابع در نقطه‌ی $(t_0,f(t_0))$ مشتق‌پذیر باشد، $f'(t_0)$ بیانگر سرعت لحظه‌ای متحرک است.

☜ مثال : معادله حرکت یک توپ که از زمین به‌طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود به‌صورت $S=۵t^{۲}-۲۰t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟

✍ حل: لحظه‌ای که توپ به زمین برخورد می‌کند $S=۰$ است، پس: $۵t^{۲}-۲۰t=۰ \rightarrow t=۴$

سرعت، مشتق جابه‌جایی است.

$$V=\frac{ds}{dt}=۱۰t-۲۰=۰ \xrightarrow{t=۴} V(۴)=۴۰-۲۰=۲۰$$

تعبیر ریاضی: اگر تابع $f(x)$ در نقطه $(x_۰,f(x_۰))$ مشتق‌پذیر باشد، $f'(x_۰)$ نشان‌دهنده‌ی شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه است.

معادله‌ی خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ای روی آن:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(x_۰\ ,\ f(x_۰))$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه معادله خط مماس و قائم بر تابع f در این نقطه برابر است با:

خط مماس: $y-f(x_۰)=f'(x_۰)(x-x_۰)$

خط قائم: $y-f(x_۰)=\frac{-۱}{f'(x_۰)}(x-x_۰)$

☜ مثال: معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y=\frac{x+۱}{۲x+۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

✍ حل:

$$f(۲)=\frac{۳}{۵} \text{ و } f'(۲)=\left.\frac{-۱}{(۲x+۱)^{۲}}\right|_{x=۲}=\frac{-۱}{۲۵}$$

پس شیب قائم برابر است با: $m=۲۵$، لذا معادله‌ی قائم عبارت است از:

$$y-\frac{۳}{۵}=۲۵(x-۲) \Rightarrow y=۲۵x-۵۰+\frac{۳}{۵}=۲۵x-\frac{۲۴۷}{۵}$$

☜ مثال: معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=\sqrt[۳]{x+۸}$ در نقطه‌ی $x_۰=۰$ کدام است؟

✍ حل:

$$f(۰)=۲ \text{ و } f'(۰)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۸)^{۲}}}=\frac{۱}{۱۲}$$

پس شیب قائم برابر است با: $m=-۱۲$، لذا معادله‌ی قائم عبارت است از:

$$y-۲=-۱۲(x-۰) \Rightarrow y=-۱۲x+۲$$

☜ مثال: در نقاط A و B به طول‌های ۱ و ۱- واقع بر منحنی $y=x^{۲}+ax+۱$ دو مماس عمود بر هم رسم شده است. مقدار a کدام است؟

✍ حل:

شیب مماس در نقطه $x=۱$: $y'=۲x+a\Big|_{x=۱}=۲+a$

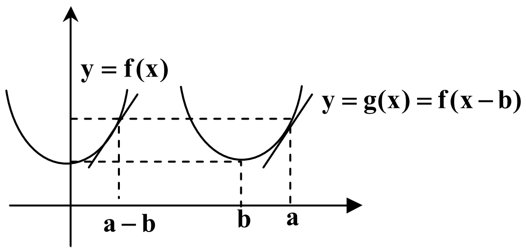
شیب مماس در نقطه $x=-۱$: $y'=۲x+a\Big|_{x=-۱}=-۲+a$

حال این دو مماس بر هم عمودند، لذا:

$$(۲+a)(a-۲)=-۱ \rightarrow a^{۲}-۴=-۱ \rightarrow a^{۲}=۳ \rightarrow a=\pm\sqrt{۳}$$

☜مثال: فرض کنید $f(x)$ یک تابع باشد و به‌ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به‌صورت $g(x)=f(x-b)$ تعریف کنیم. نشان دهید خط مماس بر $g(x)$ در نقطه‌ی a با خط مماس بر $f(x)$ در $a-b$ موازی است.

✍ حل:



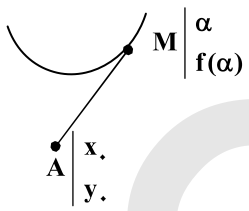
راه حل اول: نمودار $g(x)=f(x-b)$ همان نمودار $f(x)$ است که به اندازه‌ی b واحد به‌سمت راست منتقل شده است. لذا خط مماس بر $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ با خط مماس بر $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a-b$ موازی است.

راه حل دوم: شیب خط مماس برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

$$g'(x)=f'(x-b)\xrightarrow{x=a}g'(a)=f'(a-b)$$

خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج آن:

روش اول:



نقطه‌ی پارامتری $M=\left|\begin{matrix}\alpha\\ f(\alpha)\end{matrix}\right.$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. باید شیب خط واصل بین نقطه‌ی A و M برابر مشتق تابع در نقطه‌ی M باشد.

☜مثال: معادلات خطوط مماس بر منحنی $y=x^2+1$ از مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

✍ حل:

$$A=\left|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right. \qquad M=\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha^2+1\end{matrix}\right. \Rightarrow m_{AM}=f'(\alpha)\Rightarrow \frac{\alpha^2+1-0}{\alpha-0}=2\alpha\Rightarrow 2\alpha^2=\alpha^2+1\to\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm1$$

لذا نقطه‌ی مماس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}\pm1\\ 2\end{matrix}\right.$ است. لذا معادلات خطوط مماس عبارتند از:

$$\begin{cases} y-0=\frac{2}{1}(x-0)\to y=2x\\ y-0=\frac{2}{-1}(x-0)\to y=-2x\end{cases}$$

روش دوم:

معادلات دسته خطوط گذرنده از نقطه‌ی A را نوشته و با منحنی قطع می‌دهیم. معادله‌ی حاصل باید دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

دسته خطوط گذرنده از یک نقطه، در واقع کلیه خطوط گذرنده از آن نقطه است. برای نوشتن معادله‌ی دسته خطوط گذرنده از یک نقطه، معادله‌ی خط را با شیب دلخواه می‌نویسیم.

☜مثال: خطوط مماس بر منحنی $y=\frac{x+1}{x-1}$ را از مبدأ مختصات به‌دست آورید.

✍ حل:

معادله‌ی دسته خطوط گذرنده از مبدأ عبارتند از: $y-0=m(x-0)\to y=mx$

حال این دسته خطوط را با منحنی قطع می‌دهیم.

$$mx=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow mx^2-mx=x+1\Rightarrow mx^2-(m+1)x-1=0$$

باید $\Delta=0$ باشد: $\Rightarrow\Delta=(m+1)^2+4m=0\to m^2+6m+1=0\to m=\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=-3\pm2\sqrt{2}$

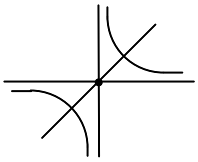
لذا معادله‌ی خطوط مماس عبارت است از: $y=(-3\pm2\sqrt{2})x$

دقت کنید که روش اول هنگامی مناسب‌تر است که ما پای مماس را بخواهیم و روش دوم هنگامی مناسب‌تر است که شیب خط مماس را بخواهیم.

خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج آن:

برای یافتن خط قائم بر منحنی، فقط از روش نقطه‌ی پارامتری می‌توان استفاده کرد.

مثال: معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=\frac{x+3}{x-1}$ را از نقطه‌ی $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ به‌دست آورید.



حل:

نقطه‌ی $M\begin{vmatrix}\alpha\\ \frac{\alpha+3}{\alpha-1}\end{vmatrix}$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم.

باید شیب خط واصل بین M و A برابر عکس و قرینه‌ی مشتق تابع در نقطه‌ی M باشد.

$$f'(\alpha)=\frac{-4}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{\frac{\alpha+3}{\alpha-1}-1}{\alpha-1}=\frac{(\alpha-1)^2}{4}\Rightarrow \frac{4}{(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{4}\Rightarrow (\alpha-1)^4=16\Rightarrow \alpha-1=\pm2\rightarrow \alpha=3,-1$$

لذا معادلات قائم عبارتند از:

$$\alpha=3: y-1=\frac{3-1}{3-1}(x-1)\rightarrow y-1=x-1\rightarrow y=x$$

$$\alpha=-1: y+1=\frac{1-(-1)}{1-(-1)}(x+1)\rightarrow y=x$$

دقت کنید به جهت تقارن منحنی نسبت به نقطه‌ی $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ دو قائم در امتداد هم قرار گرفت و الاّ ممکن بود، دو قائم متفاوت باشد.

تعیین نقاطی از منحنی که مماس بر منحنی در آن نقاط دارای شیب معلوم باشد:

اگر بخواهیم نقاطی از منحنی را پیدا کنیم که در آن نقاط منحنی دارای شیب معینی باشد، کافی است مشتق تابع را برابر شیب داده شده قرار دهیم. در این صورت یکی از حالات زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

۱) از معادله‌ی حاصل طول نقاط مورد نظر به‌دست می‌آید (به کمک آن عرض نقاط نیز معلوم می‌گردد).

۲) از معادله‌ی حاصل عرض نقاط مورد نظر به‌دست می‌آید (به کمک آن طول نقاط نیز معلوم می‌گردد).

۳) رابطه‌ای بین طول و عرض نقطه مورد نظر به‌دست می‌آید که با قطع دادن معادله‌ی حاصل با تابع، نقاط مورد نظر پیدا می‌شود (معمولاً این حالت در توابع منحنی رخ می‌دهد).

مثال: اگر معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=\sin x+mx$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ موازی $y=2x$ باشد، **m** چقدر است؟

حل:

$$y'(\frac{\pi}{3})=2\rightarrow \text{Cos}x+m\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+m=2\rightarrow m=\frac{3}{2}$$

مثال: خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ ، $(0<x<\pi)$، در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن موازی خط به معادله‌ی $3y-2x=5$ است، x_0 کدام است؟

حل:

$$y'=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{-\text{Cos}x}{\text{Sin}^2x}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2\text{Sin}^2x=-3\text{Cos}x\Rightarrow 2\text{Sin}^2x+3\text{Cos}x=0\rightarrow 2(1-\text{Cos}^2x)+3\text{Cos}x=0$$

$$\Rightarrow 2\text{Cos}^2x-3\text{Cos}x-2=0\Rightarrow (2\text{Cos}x+1)(\text{Cos}x-2)=0\Rightarrow \text{Cos}x=-\frac{1}{2},2\ \Rightarrow x_0=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

در تمام این نقاط شیب $\frac{2}{3}$ است.

مثال: طول نقاطی از منحنی $y=x^{۳}+x-۱$ را که مماس در آن نقاط بر خط $x+۴y=۰$ عمود است بیابید؟

حل:

$$y=-\frac{۱}{۴}x \to y'=۳x^{۲}+۱=+۴ \to x^{۲}=۱ \to x=\pm ۱$$

مثال: دو منحنی به معادلات $y=x-\sqrt{x+۳}$ و $y=\frac{ax+b}{x+۱}$ در نقطه‌ای به‌طول $x=۱$ بر هم مماسند. **a** و **b** را به‌دست آورید.

حل:

اگر دو منحنی به معادلات در نقطه‌ای بر هم مماس باشند، در این نقطه هم y و هم y'شان یکسان است.

$$\left.\begin{array}{l} y(۱)=۱-\sqrt{۴}=\frac{a+b}{۲} \Rightarrow a+b=-۲ \\ y'=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}\Big|_{=۱}=\frac{a-b}{(x+۱)^{۲}}\Big|_{x=۱} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{a-b}{۴} \Rightarrow a-b=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=\frac{۱}{۲} \\ b=\frac{-۵}{۲} \end{array}$$

مثال: خط $y=۲ax+b$ بر منحنی به معادله‌ی $y=x^{۴}-۲ax$ در نقطه‌ای به طول ۱ مماس است. **a** و **b** کدام‌اند؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y(۱)=۲a+b=۱-۲a \Rightarrow ۴a+b=۱ \\ y'(۱)=۲a=۴x^{۳}-۲a\Big|_{x=۱}=۴-۲a \Rightarrow ۴a=۴ \Rightarrow a=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴+b=۱ \to b=-۳$$

نقطه‌ی تقاطع و تماس در حالت کلی:

اگر خط Δ تابع $f(x)$ را در نقاط A و B قطع کند و خط Δ را به موازات خود آن‌چنان حرکت دهیم که نقاط A و B به هم نزدیک شوند، سرانجام نقاط A و B بر هم منطبق شده و نقطه‌ی تقاطع به نقطه‌ی تماس تبدیل می‌شود (مگر آن که تابع در آن نقطه خط مماس نداشته باشد. مانند نقاط زاویه‌دار)

اگر معادله‌ی دو تابع را با یکدیگر قطع دهیم، ریشه‌های ساده‌ی معادله، حاصل از تقاطع طول نقاط تقاطع و ریشه‌های مضاعف نقاط تماس می‌باشد (مگر آن که ریشه مضاعف طول نقطه زاویه‌دار باشد).

در معادلات درجه دوم، ریشه‌ی مضاعف از $\Delta=۰$ به‌دست می‌آید.

در توابع مثلثاتی Sinx و Cosx ریشه‌ی مضاعف معادله هنگامی است که $\sin x=\pm ۱$ و $\cos x=\pm ۱$.

در حالت کلی برای به‌دست آوردن ریشه‌ی مضاعف یک معادله کافی است ریشه‌های مشترک بین تابع و مشتق آن را بیابیم. در واقع دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=۰ \\ f'(x)=۰ \end{cases}$$

مثال: وضعیت دو منحنی $y=x^{۳}+۱$, $y=۲x^{۲}-x+۱$ را بررسی کنید.

حل:

کافی است دو منحنی را برابر قرار دهیم و تعیین کنیم، ریشه‌ها ساده است یا مضاعف.

$$x^{۳}+۱=۲x^{۲}-x+۱ \Rightarrow x^{۳}-۲x^{۲}+x=x(x^{۲}-۲x+۱)=۰ \Rightarrow x(x-۱)^{۲}=۰ \begin{cases} x=۰ & \text{ریشه ساده} \to \text{نقطه تقاطع} \\ x=۱ & \text{ریشه مضاعف} \to \text{نقطه مماس} \end{cases}$$

مثال: اگر خط $y=6x+b$ بر منحنی $y=x^6$ مماس باشد، b کدام است؟

حل:

$$y=6x+b=x^6 \Rightarrow x^6-6x-b=0$$

برای یافتن ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی فوق این معادله را با مشتق آن در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^6-6x-b=0 \\ 6x^5-6=0 \to x=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{این ریشه باید ریشه معادله اول هم باشد}} 1-6-b=0 \Rightarrow b=-5$$

مثال: اگر منحنی $y=2\sin x-1$ و $y=-\sin x+a$ بر هم مماس باشند، a کدام است؟

حل:

$$2\operatorname{Sin}x-1=-\operatorname{Sin}x+a \Rightarrow 3\operatorname{Sin}x=a+1 \Rightarrow \operatorname{Sin}x=\frac{a+1}{3}$$

معادله $\operatorname{Cos}x=k, \operatorname{Sin}x=k$ هنگامی ریشه‌ی مضاعف دارند که $k=\pm1$ باشد، پس:

$$\frac{a+1}{3}=\pm1 \Rightarrow a+1=\pm3 \begin{cases} a=2 \to \operatorname{Sin}x=1 \text{ به ازای} \\ a=-4 \to \operatorname{Sin}x=-1 \text{ به ازای} \end{cases}$$

مثال: اگر خط $y=3x-m$ بر منحنی $y=x^3-2$ مماس باشد، m کدام است؟

حل:

$$x^3-2=3x-m \to x^3-3x-2+m=0$$

باید ریشه‌ی مضاعف این معادله را بیابیم، پس این معادله را با مشتق آن در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^3-3x-2+m=0 \\ 3x^2-3=0 \to x=\pm1 \to \begin{cases} 1-3-2+m=0 \to m=4 \quad : x=1 \\ -1+3-2+m=0 \to m=0 : x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

مثال: خط $y=-1$ بر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x^2-x+a$ مماس است. a کدام است؟

حل:

$$2x^2-x+a=-1 \xrightarrow[\text{داشته باشد}]{\text{باید ریشه مضاعف}} 2x^2-x+a+1=0 \to \Delta=(-1)^2-4(2)(a+1)=0 \Rightarrow a+1=\frac{1}{8} \to a=-\frac{7}{8}$$

آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر تابع :

اگر متغیر از x_0 تا $x_0+\Delta x$ تغییر کند، میزان تغییر تابع برابر است با $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ لذا آهنگ متوسط تغییر تابع f برابر است با : $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f برابر است با: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)$

مثال: در تابعی با ضابطه $f(x)=\frac{240}{x}$ آهنگ آنی تغییر تابع f در $x=4$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=3$ تا $x=5$ بیشتر است؟

حل:

$$x=4 \text{ آهنگ آنی در } = f'(4)=-\frac{240}{x^2}\Big|_{x=4}=-\frac{240}{(4)^2}=-15$$

آهنگ متوسط از $x=3$ تا $x=5$: $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{\frac{240}{5}-\frac{240}{3}}{5-3}=\frac{48-80}{2}=-16 \Rightarrow$ آهنگ آنی از آهنگ متوسط، ۱ واحد بیش‌تر است.

☜مثال: شعاع بادکنکی کروی با سرعت $3\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد وقتی سطح کره به $10cm^2$ می‌رسد، حجم آن با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

✍ حل:

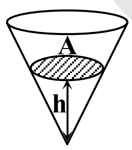
$$\frac{dR}{dt}=3\frac{m}{s}$$
$$S=4\pi R^2=10cm^2$$
$$v=\frac{4}{3}\pi R^3 \to \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dR}\times\frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi R^2\frac{dR}{dt} \to \frac{dv}{dt}=10\times 3=30\frac{m^3}{s}$$

☜مثال: آهنگ آنی تغییر مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع نسبت به محیط آن چقدر است؟

✍ حل:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \to \frac{ds}{d(2P)}=\frac{\frac{ds}{da}}{\frac{d(2p)}{da}}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{4}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$
$$2p=3a$$

☜مثال: قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۵ سانتی‌متر است. این قیف را پر از آب می‌کنیم و در لحظه $t=0$ شیر آن را باز می‌کنیم و آب با سرعت $2\frac{cm^3}{s}$ از آن خارج می‌شود.

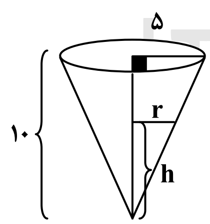


الف) اگر ارتفاع آب باقی‌مانده در قیف را با h نشان دهیم، آهنگ تغییرات h نسبت به زمان را در هر لحظه حساب کنید.

ب) سطح آب باقی‌مانده در قیف را با A نمایش می‌دهیم. با محاسبه A برحسب زمان آهنگ تغییرات A را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

✍ حل:

الف) با نوشتن قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{r}{h}=\frac{5}{10}\Rightarrow h=2r$$
$$v=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi(\frac{h}{2})^2 h}{3}=\frac{\pi h^3}{12}$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dh}\times\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{3\pi h^2}{12}\times\frac{dh}{dt}=\frac{\pi h^2}{4}\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow -2=\frac{\pi h^2}{4}\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{8}{\pi h^2}$$

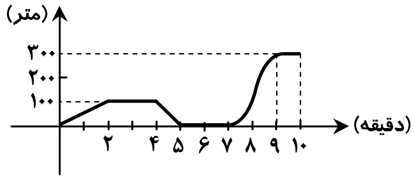
ب)

$$A=\pi r^2=\pi(\frac{h}{2})^2=\frac{\pi h^2}{4} \Rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dh}\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{2\pi h}{4}\times\frac{dh}{dt}$$

با توجه به رابطه‌ی (الف) داریم:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{2\pi h}{4}\times\frac{-8}{\pi h^2}=\frac{-4}{h}$$

مثال: مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه‌ی علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه‌ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته به شکل زیر است:



الف) فاصله‌ی مدرسه‌ی علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده تا علی به مدرسه برود؟

ب) در دو دقیقه‌ی اول حرکت، سرعت علی چقدر بوده است؟

ج) در دو دقیقه‌ی دوم، علی احتمالاً چه کاری کرده است؟

د) در دقایق بین ٤ و ٥ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت کرده است؟ در حال دویدن بوده یا راه رفتن؟

هـ) در دقایق بین ۵ و ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چه می‌کرده است؟

و) بین دقایق ۷ و ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر است و احتمالاً چه کاری می‌کرده است؟

ز) بین دقایق ۹ و ۱۰ علی کجا بوده و احتمالاً چه می‌کرده است؟

حل:

الف) در لحظه‌ی $t=10$ که پایان حرکت علی است، او در مکان ۳۰۰ متر قرار دارد. پس فاصله‌ی خانه تا مدرسه ۳۰۰ متر است. و ۱۰ دقیقه طول کشیده تا به مدرسه برسد.

ب) چون حرکت در این دقایق خطی است، سرعت لحظه‌ای و متوسط برابر است و هر دو برابر است با شیب خط مماس بر منحنی حرکت.

$$v=\frac{x(2)-x(0)}{2-0}=\frac{100-0}{2}=50\frac{m}{min}$$

ج) در دو دقیقه‌ی دوم تغییر در مکان رخ نداده پس علی احتمالاً برای دیدن مغازه‌ها، ایستاده است.

د) در این‌جا نیز حرکت خطی است، اما چون شیب منفی است علی با سرعت $\frac{x(5)-x(4)}{5-4}=-100\frac{m}{min}$ به سمت خانه برگشته است. (و چون سرعت زیادتر است احتمالاً دویده).

هـ) در دقیقه‌ی ۵ تا ۷ علی در منزل بوده است.

و) در دقایق بین ۷ تا ۹ با سرعت به طرف مدرسه رفته و سرعت متوسط او در این بازه برابر است با:

$$\frac{x(9)-x(7)}{9-7}=\frac{300}{2}=150$$

که به جهت افزایش زیاد سرعت احتمالاً این مسیر را با ماشین طی کرده است.

ز) در دقیقه‌ی ۹ به مدرسه رسیده و ۱ دقیقه برای ورود به مدرسه صبر کرده است.

تابع ثابت:

مشتق تابع $f(x)=c$ همواره صفر است و بالعکس اگر مشتق تابعی برابر صفر باشد، آن تابع همواره تابعی ثابت است.

توابع صعودی و نزولی :

تابع $f(x)$ را در بازه‌ی (a,b) صعودی گویند هرگاه به‌ازای هر x که $x_1,x_2\in(a,b)$: اگر $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

و نزولی گویند هرگاه: اگر $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\leq f(x_1)$

تابع $f(x)$ را در بازه‌ی (a,b) صعودی اکید گویند هرگاه به‌ازای هر x که $x_1,x_2\in(a,b)$: اگر $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$

و نزولی اکید گویند هرگاه: اگر $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

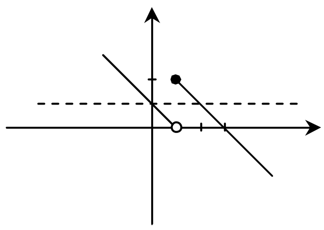
مثال: کدام‌یک از توابع زیر نزولی (اکید) است؟

حل:

نکته: در توابع چندضابطه‌ای برای بررسی یکنوایی اکید تابع لازم است تابع در هر ضابطه‌اش یکنوا باشد واشتراک برد ضابطه‌ها تهی باشد.

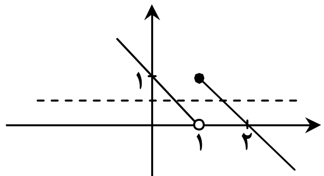
$$۱)\, f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x<۱\\ -x+۳ & x\geq ۱\end{cases}$$

نه صعودی است نه نزولی



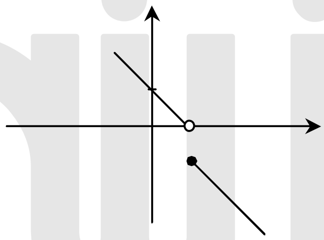
$$۲)\, f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x<۱\\ -x+۲ & x\geq ۱\end{cases}$$

نه صعودی است نه نزولی



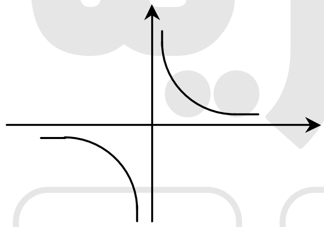
$$۳)\, f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x<۱\\ -x & x\geq ۱\end{cases}$$

نزولی اکید است.



$$۴)\, f(x)=\frac{۱}{x}$$

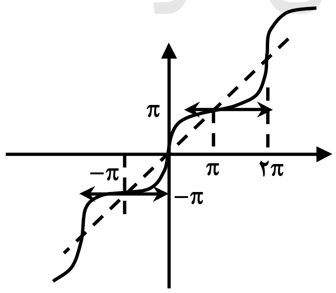
نه صعودی است نه نزولی



قضیه: اگر تابع f در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این بازه صعودی است هرگاه برای $x\in(a,b)$ داشته باشیم : $f'(x)\geq ۰$ و نزولی است هرگاه $f'(x)\leq ۰$ (به‌همین ترتیب صعودی اکید است، هر گاه $f'(x)>۰$ و نزولی اکید است، هر گاه $f(x)<۰$).

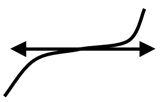
توجه: اگر تابع در نقاط محدودی (نه در طول یک بازه) دارای مشتق برابر صفر باشد، باز هم می‌توان از قضیه‌ی فوق برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع استفاده کرد. مثلاً در تابع $f(x)=x+\sin x$

$$f'(x)=۱+\cos x$$

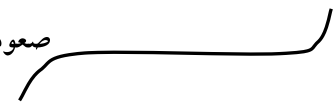


مشتق در نقاط محدودی برابر صفر است اما تابع صعودی (اکید) می‌باشد پس اگر f' برابر صفر شد، باید بررسی کنیم که آیا تابع در یک بازه برابر عدد ثابت بوده است یا در یک نقطه محدود مشتق آن صفر شده است.

صعودی(اکید



صعودی



$$x>x_۱ \Rightarrow f(x)\geq f(x_۱) \Rightarrow \lim_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)\geq ۰}{x-x_۱\geq ۰}\geq ۰$$

نکته: اگر تابع در قسمتی از دامنه‌اش صعودی و در قسمت دیگرش نزولی باشد، آن را صعودی یا نزولی نمی‌گویند. (نه صعودی نه نزولی می‌گویند)

اگر تابع در تمام دامنه‌اش مشتق‌پذیر نباشد (حتی اگر در بعضی از نقاط مشتق وجود داشته باشد) نمی‌توان از تعیین علامت مشتق پی به صعودی یا نزولی بودن آن برد.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+x$ همواره صعودی است. محدوده‌ی تغییرات a کدام است؟

حل:

$$f'(x)=3x^2+2ax+1$$

باید مشتق تابع همواره نامنفی باشد، لذا باید Δ عبارت فوق کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$\Delta \le 0 \to 4a^2-12\le 0 \to a^2\le 3 \to -\sqrt{3}\le a\le \sqrt{3}$$

مثال: تابع $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ در چه فاصله‌ای صعودی است؟

حل:

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$$

باید مشتق نامنفی باشد، پس:

$$\frac{x^3-1}{x^2}\ge 0 \xrightarrow{x^2\ge 0} x^3-1\ge 0 \to x^3\ge 1 \to x\ge 1$$

مثال: تابع $f(x)=4\text{Cos}x+\text{Cos}2x$ بر کدام بازه‌ها نزولی (اکید) است؟

حل:

$$f'(x)=-4\text{Sin}x-2\text{Sin}2x=-4\text{Sin}x(1+\text{Cos}x)\le 0$$

چون همواره $1+\text{Cos}x\ge 0$ است، پس باید: $\text{Sin}x\ge 0$ باشد که این اتفاق در ربع اول و دوم رخ می‌دهد.

$$2k\pi\le x\le (2k+1)\pi$$

مثال: تابع $f(x)=(x-1)^3(x+1)$ در کدام بازه نزولی است؟

حل:

$$f'(x)=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3\times 1=(x-1)^2(3(x+1)+(x-1))$$
$$=(x-1)^2(4x+2)\le 0 \xrightarrow{(x-1)^2\ge 0} 4x+2\le 0 \to x\le \frac{-1}{2}$$

مثال: تابع $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه‌ها صعودی است؟

حل:

$$f'(x)=\frac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}>0$$

مشتق این تابع همواره مثبت است. اما به دلیل آن‌که نقاط ± 1 در دامنه تابع نیست، پس تابع بر بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(-1,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{ax-5}{x+(a-6)}$ برای $x>1$ صعودی است، محدوده a کدام است؟

حل:

اولاً باید مشتق تابع مثبت باشد:

$$f'(x)=\frac{a(a-6)+5}{(x+(a-6))^2}=\frac{a^2-6a+5}{(x+(a-6))^2}$$

لذا: $a^2-6a+5\geq 0$ پس: $(a-5)(a-1)\geq 0$ است، لذا $a\geq 5$ یا $a\leq 1$

ثانیاً: چون نقطه‌ی $x=6-a$ در دامنه‌ی تابع نمی‌باشد، لذا باید این نقطه قبل از $x=1$ باشد تا برای $x>1$ تابع همواره صعودی باشد.

$$6-a\leq 1\rightarrow a\geq 5$$

پس جواب نهایی $a\geq 5$ است.

نکته: اگر توابع f و g هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند fog صعودی و اگر یکی از آن‌ها صعودی و دیگری نزولی باشد fog نزولی است.

نزولی و f صعودی : g $\;x_2>x_1\Rightarrow \overbrace{g(x_2)}^{X_2}\leq \overbrace{g(x_1)}^{X_1}\Rightarrow f(X_2)\leq f(X_1)\Rightarrow f\big(g(x_2)\big)\leq f\big(g(x_1)\big)$

اگر f , g , fog مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

نزولی- نزولی : $<0\times<0\rightarrow>0$

صعودی - صعودی : $>0\times>0\rightarrow>0$

نزولی- صعودی : $<0\times>0\rightarrow<0$

مثال: اگر برای هر $x\in R: f(x)>0$ باشد و تابع $f(x)$ اکیداً نزولی باشد، کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟ (f مشتق‌پذیر است.)

۱) f^2 ۲) f^3 ۳) $\sqrt{f}$ ۴) $\dfrac{1}{f}$

حل:

$$(f^2)'=\underset{>0}{2f}\times\underset{<0}{f'}$$

$$(f^3)'=\underset{>0}{3f^2}\times\underset{<0}{f'}$$

$$(\sqrt{f})'=\frac{f'<0}{2\sqrt{f}>0}\quad<0$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}=-\frac{f'<0}{f^2>0}>0\rightarrow$$ پس این تابع اکیداً صعودی است.

مشتق تابع وارون:

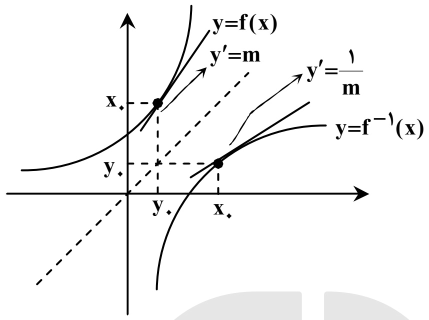
به یاد داریم: $(f^{-1}of)(x) = x \qquad x \in D_f$

حال اگر از این تابع مشتق بگیریم، خواهیم داشت: $(f^{-1}of)'(x) = 1 \to f'(x)\times(f^{-1})'(f(x)) = 1 \to (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

یعنی اگر $f(a) = b$ باشد، خواهیم داشت: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

اگر $f(x) = y$ در نظر گرفته شود، خواهیم داشت: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

از لحاظ نموداری داریم:



☜مثال: خط مماس بر معکوس تابع $y = x^3 + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر معکوس تابع را به‌دست آورید.

✍ حل:

$$x^3 + 1 = 2 \to x = 1 \to (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3x^2\Big|_{x=1}} = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

☜مثال: اگر $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x)}}$ باشد، $(f^{-1})'(x)$ کدام است؟

✍ حل:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+f^2(f^{-1}(x))}}} = \sqrt{1+x^2} \qquad x \in D_{f^{-1}}$$

می‌دانیم $f(f^{-1}(x)) = x$ است.

مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

می‌خواهیم مشتق $y = Sin^{-1}x$ را محاسبه کنیم. برای این منظور دو راه داریم:

راه اول: $y = Sinx \to y' = Cosx$

اگر $Sina = b$ باشد، خواهیم داشت:

$$(y^{-1})'(b) = \frac{1}{y'(a)} \Rightarrow (Sin^{-1})'(b) = \frac{1}{(Sinx)'\big|_{x=a}} = \frac{1}{Cosa} \Rightarrow (Sin^{-1})'(b) = \frac{1}{Cos(Sin^{-1}b)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

به یاد دارید: $Cos(Sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$

پس خواهیم داشت: $(Sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

به‌طور مشابه: $(Cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (Cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

راه دوم:

$$y=\sin x \rightarrow x=\sin^{-1}y \xrightarrow[\text{x مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف نسبت به}} 1=y'(\sin^{-1})(y)$$

$$\Rightarrow (\sin^{-1})'(y)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow (\sin^{-1})(y)=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

☜مثال: معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=\cos^{-1}x$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ واقع بر آن را به‌دست آورید.

✍ حل:

$$\cos^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3} \rightarrow y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

پس معادله‌ی خط قائم عبارت است از:
$$y-\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{1}{2})$$

☜مثال: ثابت کنید:

الف) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

ب) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

✍ حل:

الف) $(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$

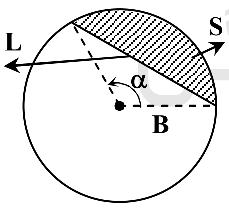
چون مشتق تابع برابر صفر است، پس تابع، تابع ثابت است. لذا برای یافتن مقدار آن یک نقطه‌ی دلخواه را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\sin^{-1}(\frac{1}{2})+\cos^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

اثبات قسمت ب مشابه الف است.

☜مثال: در شکل روبه‌رو، وتری از دایره به شعاع واحد رسم شده است که کمانی به زاویه‌ی α را از دایره جدا کرده است. اگر مساحت قسمت هاشورخورده را با S نشان دهیم، آهنگ تغییرات S نسبت به α و نسبت به L را به‌دست آورید.

✍ حل:



$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\alpha(1)^2}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{2} \Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}}=\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)$$

$$\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{\cos\alpha}{2}$$

قضیه کسینوس‌ها: $L^2=1^2+1^2-2\times1\times1\cos\alpha$

$$\Rightarrow L^2=2-2\cos\alpha=2(1-\cos\alpha)=2(2\sin^2\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow L=2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{L}{2}$$

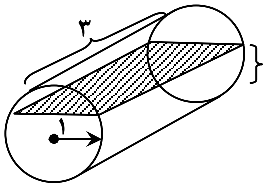
و چون: $S=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2(\frac{L}{2})\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}=L\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2} \Rightarrow S=\frac{1}{2}(2\sin^{-1}\frac{L}{2}-L\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2})$$

$$\frac{ds}{dL}=\frac{1}{2}(2\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}})-\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}-L\times\frac{-\frac{L}{2}}{2\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}}$$

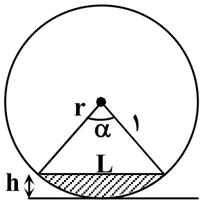
$$\frac{ds}{dL}=\frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}}-\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}+\frac{L^2}{4\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}}=\frac{2-4(1-(\frac{L}{2})^2)+L^2}{4\sqrt{1-(\frac{L}{2})^2}}=\frac{-2+2L^2}{2\sqrt{4-L^2}}=\frac{L^2-1}{\sqrt{4-L^2}}$$

مثال: منبع گازوئیل استوانه‌ای شکلی داریم که به‌صورت خوابیده روی زمین است. اگر منبع به‌گونه‌ای پـر شـود کـه ارتفـاع گازوئیل با سرعت $3\dfrac{cm}{min}$ افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه چقدر خواهد بود؟



حل:

حجم گازوئیل برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع، کافی است مساحت قاعده را برحسب α به‌دست آوریم:



$$S=\frac{1}{2}(\alpha-\mathrm{Sin}\alpha)$$

$$L^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\mathrm{Cos}\alpha=2(1-\mathrm{Cos}\alpha)=2(2\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2})\rightarrow L=2\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}\times(1-h)\times L=\frac{1}{2}\times1\times1\times\mathrm{Sin}\alpha\rightarrow(1-h)\times2\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{Sin}\alpha$$

$$\Rightarrow 1-h=\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow h=1-\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}=1-h\Rightarrow\alpha=2\mathrm{Cos}^{-1}(1-h)$$

$$S=\frac{1}{2}(2\mathrm{Cos}^{-1}(1-h)-2\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2})=\mathrm{Cos}^{-1}(1-h)-\sqrt{1-(1-h)^2}\times(1-h)$$

$$\Rightarrow S=\mathrm{Cos}^{-1}(1-h)-\sqrt{2h-h^2}\times(1-h)$$

$$v=S\times h=3(\mathrm{Cos}^{-1}(1-h)-\sqrt{2h-h^2}\times(1-h))$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dh}\times\frac{dh}{dt}=3\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-h)^2}}-\frac{2-2h}{2\sqrt{2h-h^2}}\times(1-h)+\sqrt{2h-h^2}\right)\times3=\frac{9(-2h^2+4h)}{\sqrt{2h-h^2}}$$