عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: اعداد حقیقی

مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ تشکیل شده است از اعدادی با نمایش: $\alpha = \pm a / a_1a_2\ldots$ که در آن a و a_i ها اعداد حسابی هستند. و $0 \le a_i \le 9$ می‌باشد.

مجموعه اعداد گویا $(\mathbb{Q})$ به صورت $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z} \ , b \neq 0 \ , (a,b) = 1\right\}$ تعریف می شود. اعداد اعشاری با اعشار متناهی (مختوم) مانند ۶/۲۳ و اعداد اعشاری متناوب ساده مانند $2/\overline{3}$ و اعداد اعشاری متناوب مرکب مانند $2/7\overline{182}$ نیز اعداد گویا می‌باشند.

مجموعه اعداد گنگ $(\mathbb{Q}')$: اعداد اعشاری با اعشار نامتناهی و نامتناوب، مجموعه اعداد گنگ را تشکیل می‌دهند.

مانند : $e = 2/7182\ldots\ldots$ $\quad \pi = 3/1415\ldots\ldots$

کلیه رادیکال‌هایی که زیر رادیکال آن‌ها، اعداد غیرمربع کامل باشند، گنگ هستند. مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ همچنین توابع لگاریتمی که به صورت $\mathrm{Log}_{a^n}^{a^m}$ نیستند ، نیز اعداد گنگ می باشند.

مجموعه اعداد حقیقی در واقع اجتماع مجموعه اعداد گویا و گنگ است: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: خواص اعداد حقیقی

مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارای خواص زیر است: (برای هر x و y و z حقیقی)

۱) $x+y\in\mathbb{R}$ (بسته بودن نسبت به جمع)

۲) $x\times y\in\mathbb{R}$ (بسته بودن نسبت به ضرب)

۳) $z+(y+z)=(x+y)+z$ (شرکت‌پذیری نسبت به جمع)

۴) $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$ (شرکت‌پذیری نسبت به ضرب)

۵) $x+y=y+x$ (جابجایی نسبت به جمع)

۶) $x\times y=y\times x$ (جابجایی نسبت به ضرب)

۷) عدد $\circ\in\mathbb{R}$ وجود دارد که اگر $x\in\mathbb{R}$ آن‌گاه: $x+\circ\in\mathbb{R}$ (عضو بی‌اثر جمع)

۸) عدد $1\in\mathbb{R}$ وجود دارد که اگر $x\in\mathbb{R}$ آن‌گاه: $x\times 1=x$ (عضو بی‌اثر ضرب)

۹) اگر $x\in\mathbb{R}$ ، آن‌گاه $(-x)\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $x+(-x)=\circ$ (عضو قرینه)

۱۰) اگر $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq\circ$ ، آن‌گاه $x^{-1}=\frac{1}{x}\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $x\times\frac{1}{x}=1$ (عضو وارون)

۱۱) $x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$ (توزیع پذیری ضرب برروی جمع)

تعریف : اگر $x,y\in\mathbb{R}$ تفاضل y از x عبارت است از : $x-y=x+(-y)$

و به ازای $y\neq\circ$ تقسیم x بر y چنین است: $\frac{x}{y}=x\times y^{-1}$

۱) اگر رابطه‌ی $a \le b \le \frac{c}{n}$ به‌ازای تمام اعداد طبیعی n برقرار باشد، آن‌گاه $(a,b,c) \in \mathbb{R}, a = b$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت: اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم $۰ < x < \varepsilon$ آن‌گاه $x = ۰$

۲) بین هر دو عدد حقیقی، حداقل یک عدد گویا و حداقل یک عدد اصم وجود دارد.

۳) اگر $a,b \in Q$ آنگاه $a \pm b \in Q$ و $ab \in Q$, $\frac{a}{b} \in Q$ $\quad b \ne ۰$

اگر $a \in Q$ و $b \in Q'$ آنگاه $a \pm b \in Q'$ اما در مورد ab و $\frac{a}{b}$ نمی‌توان اظهار نظر قطعی کرد.

$$a = ۰ \quad \Rightarrow ab = \frac{a}{b} = ۰ \in Q \qquad\qquad a \ne ۰ \quad \Rightarrow ab, \frac{a}{b} \in Q'$$

اگر $a \in Q'$ و $b \in Q'$ آنگاه در مورد $a \pm b$ و ab و $\frac{a}{b}$ هیچ نمی‌توان گفت، مثلاً

$$(\sqrt{۲}+۱)+(۱-\sqrt{۲}) = ۲ \in Q \qquad\qquad (\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱) = ۱ \in Q$$

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \in Q' \qquad\qquad \sqrt{۲} \times \sqrt{۳} \in Q'$$

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: ویژگی‌های نامساوی‌ها

۱) اگر $a < b$ آنگاه $\begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac < bc \\ c < 0 \Rightarrow ac > bc \end{cases}$

۲) $\left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c > b + d$

۳) اگر $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases}$ آنگاه $ac > bd$

توان‌ها گویای یک عدد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود : $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

نکات:

لذا در مورد اعداد حقیقی خواص زیر نیز برقرار است:

۱) اگر $a > b$ آن‌گاه : $\left.\begin{array}{l} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{array}\right\}$

۲) اگر $a > b > 0$ آن‌گاه : $\left.\begin{array}{l} a^{2n} > b^{2n} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{array}\right\}$

۳) اگر $a > b > 0$ آن‌گاه : $b^{-1} > a^{-1}$

۴) اگر $0 < a < 1$ آن‌گاه : $0 < a^n < 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

موضوع: کسر مولّد عدد اعشاری متناوب

اعداد اعشاری مانند $۰/\overline{a_۱a_۲\cdots a_m}$ را عدد اعشاری متناوب ساده گویند و $a_۱a_۲\cdots a_m$ را دوره‌ی گردش آن می‌نامند .
مولّد یک عدد اعشاری ساده برابر است با :

$$\frac{a_۱a_۲\cdots a_m}{\underbrace{۹۹\cdots\cdots\cdots۹}_{m}}$$

اعداد اعشاری مانند $۰/a_۱a_۲\cdots a_m\overline{b_۱b_۲\cdots b_n}$ را عدد اعشاری متناوب مرکّب گویند و به $a_۱a_۲\cdots a_m$ ارقام غیر گردش و به $b_۱b_۲\cdots b_n$ ارقام دوره‌ی گردش می‌گویند . مولّد یک عدد اعشاری متناوب مرکّب برابر است با :

$$\frac{a_۱a_۲\cdots a_m b_۱b_۲\cdots b_n - a_۱a_۲\cdots a_m}{\underbrace{۹۹\cdots\cdots\cdots۹}_{n}\underbrace{۰۰\cdots\cdots۰}_{m}}$$

تذکر : اگر عدد اعشاری متناوب داده شده بزرگتر از یک بود، کافی است آن را به صورت جمع یک عدد صحیح و یک عدد اعشاری متناوب کوچکتر از یک بنویسیم و در نهایت عدد صحیح را با کسر مولد عدد اعشاری متناوب جمع کنیم.

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق یک عدد در واقع جزء بدون علامت آن است. قدرمطلق یک عدد مثبت یا صفر خود آن عدد و قدرمطلق یک عدد منفی، منفی آن عدد است.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

خواص قدرمطلق :

۱) $\sqrt{a^2} = |a|$

۲) $|a^2| = |a|^2$

۳) $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq |a| \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۴) $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |x| \geq |a| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$

۵) $|-a| = |a|$

۶) $|ab| = |a||b|$

۷) $-|a| \leq a \leq |a|$

۸) $|a+b| \leq |a| + |b|$ نامساوی مثلث

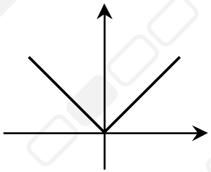
۹) $|a| - |b| \leq |a-b|$

۱۰) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

موضوع: نمودار توابع قدرمطلقی

نمودار تابع $f(x)=|x|$ به‌صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$



روش سریع برای رسم جمع و تفریق چند قدرمطلق:

ابتدا تمام ریشه‌های قدرمطلق‌ها را به‌دست آورده، سپس در تابع قرار می‌دهیم تا مقدار تابع در ریشه‌ها به‌دست آید. سپس یک نقطه بعد از آخرین ریشه و یک نقطه قبل از اولین ریشه به معادله می‌دهیم. سپس نقاط حاصل را به‌هم وصل می‌کنیم. (چون تغییر ضابطه‌ی توابع قدرمطلقی در نقاط تغییر علامت داخل قدرمطلق رخ می‌دهد.)

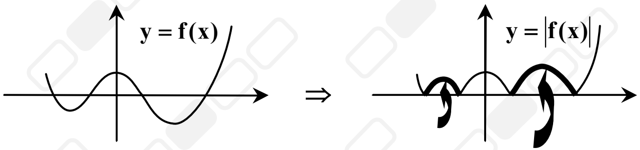
عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: نمودار توابع قدرمطلق

رسم نمودار $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$:

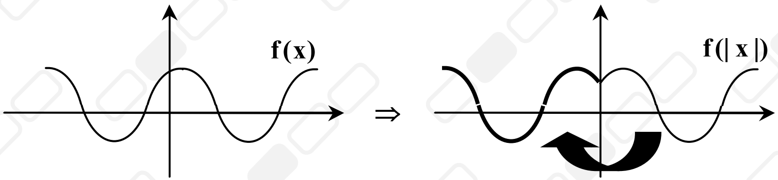
چون خروجی قدرمطلق همواره عدد مثبتی است، برای رسم $y=|f(x)|$ کافی است قسمت $y=f(x)<0$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



رسم $f(|x|)$:

چون خروجی قدرمطلق همواره مثبت است، ابتدا در نمودار $f(x)$ قسمت xهای منفی را حذف می‌کنیم. سپس قسمت xهای مثبت را در طرف xهای منفی قرینه می‌کنیم چون:

$f(|-x_0|)=f(|x_0|)$



عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

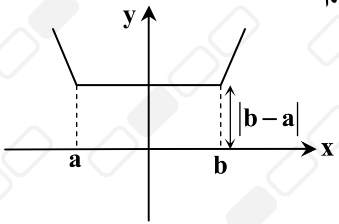
موضوع: نمودار توابع قدرمطلق

رسم دو تابع خاص:

۱) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x-a|+|x-b|$ (با شرط $a<b$)

برای رسم این نمودار ابتدا تابع را به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق ضابطه‌بندی می کنیم، خواهیم داشت:

$$y=|x-a|+|x-b|=\begin{cases}-2x+a+b & x<a\\ b-a & a\le x\le b\\ 2x-a-b & x>b\end{cases}$$

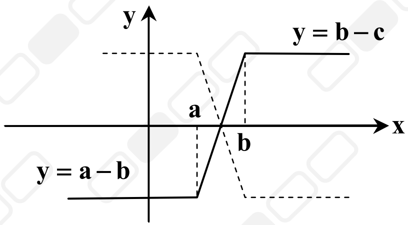


این نمودار شامل خطی موازی محور xها به طول $b-a$ و دو خط با شیب‌های ۲ و ۲- می‌باشد. تابع دارای محـور تقـارنی بـه معادلـه‌ی $x=\frac{a+b}{2}$ است. برای رسم کافی است ریشه‌های داخل قدرمطلق را یافته و مطابق شکل خطوط را رسم کرد.

۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x-a|-|x-b|$ با شرط ($a<b$)

مانند تابع قبلی با استفاده از ریشه‌های داخل قدرمطلق عبارت را ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$y=|x-a|-|x-b|=\begin{cases} a-b & x<a \\ 2x-a-b & a\le x\le b \\ b-a & x>b \end{cases}$$



اگر $a>b$ باشد، شکل نقطه‌چین حاصل می‌شود. این تابع مرکز تقارنی به مختصات $(\frac{a+b}{2},0)$ دارد.

به معادلاتی که شامل عبارات قدرمطلقی هستند، معادلات قدرمطلقی گفته می‌شود.

مثلاً معادله‌ی قدرمطلقی $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله‌ی $\left.\begin{matrix} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{matrix}\right\}$ است.

برای یافتن جواب‌های این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم.

نامعادلات قدرمطلقی:

نامعادلاتی که دارای عبارت‌های قدرمطلقی هستند را نامعادلات قدرمطلقی می‌نامند. برای حل این نامعادلات هم می‌توان از خاصیت مهم قدرمطلق به صورت زیر استفاده کرد:

$$k>0 \quad : \quad |x|\le k \quad \Rightarrow \quad -k\le x\le k$$

$$|x|\ge k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x\ge k \\ x\le -k \end{cases}$$

هم می‌توان با به توان ۲ رساندن دو طرف نامعادله، نامعادله را تبدیل به یک نامعادله‌ی درجه‌ی دو کرد که البته در این روش امکان ورود ریشه‌های اضافی هم وجود دارد که باید از این موضوع اجتناب کرد و نهایتاً جواب‌ها را در معادله صدق داد و جواب‌های اضافی را حـذف کرد.

از روش هندسی و رسم نیز می‌توان برای حل معادلات و نامعادلات قدرمطلقی استفاده نمود.

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: جزء صحیح

تعریف: برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد منحصر به فرد و صحیح n و اعشاری p $(0 < p < 1)$ وجود دارد که $x = n + p$ باشد، عدد صحیح n را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$n \le x \le n+1 \Rightarrow [x] = n$$

به عبارت دیگر، جزءصحیح یک عدد، بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر (کوچک‌تر یا مساوی) از آن عدد است.

نکات:

1) $x \notin \mathbb{Z} : [-x] = -[x] - 1$

2) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $[x+k] = [x] + k \quad k \in \mathbb{Z}$

4) $[x] \le x \le [x] + 1 \Rightarrow 0 \le x - [x] < 1$

5) $[x] \ge a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x \ge a$

6) $[x] > a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x \ge a + 1$

7) $[x] \le a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x < a + 1$

8) $[x] < a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x < a$

موضوع: رسم نمودارهای توابع جزء صحیح

برای رسم نمودار توابع به فرم $y=[f(x)]$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

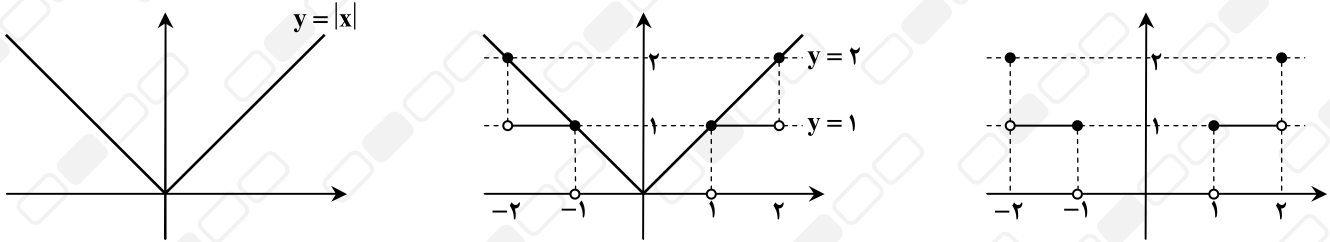
الف) تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم.

ب) خطوط $y=0,\pm1,\pm2,\cdots$ را رسم می‌کنیم.

ج) قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y=k$ و $y=k+1$، $(k\in\mathbb{Z})$ قرار می‌گیرد را بر روی خط $y=k$ تصویر می‌کنیم.

د) در نقاط تلاقی خط و نمودار، نقطه توپر است.

برای مثال به مراحل رسم تابع $y=\left[\,|x|\,\right]$ در بازه‌ی $-2\le x\le 2$ دقت کنید:



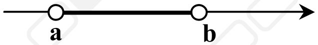
موضوع: بازه(فاصله)

$[a,b]$ را بازه‌ی بسته از a تا b می نامند و a و b را ابتدا و انتهای بازه می‌نامند و داریم:

$$[a,b]=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ a\le x\le b\}$$

بازه‌ی (a,b) را بازه‌ی باز می‌نامیم.

$$(a,b)=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ a< x< b\}$$



بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را بازه‌هایی نیم‌باز می‌نامند.

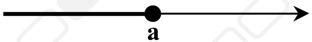
$$[a,b)=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ a\le x< b\}$$

$$(a,b]=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ a< x\le b\}$$

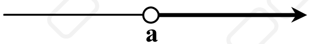
بازه‌های $[a,+\infty)$ و $(-\infty,a]$ و (a,∞) و $(-\infty,a)$ و $(-\infty,\infty)$ را نیز بازه‌های نامتناهی می‌نامند.

$$[a,\infty)=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ x\ge a\}$$

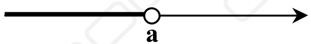
$$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ x\le a\}$$



$$(a,\infty)=x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ x> a\}$$



$$(-\infty,a)=x\,|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ x< a\}$$



گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه

موضوع: همسایگی یک نقطه یا بازه‌ی متقارن

بازه‌های به‌صورت $(a-\delta,a+\delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی نقطه‌ی a یا بازه‌ی متقارن با نقطه میانی a و شعاع δ می‌نامند، که به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$(a-\delta,a+\delta)$ یا $|x-a|<\delta$ یا $(a-\delta,a)\cup\{a\}\cup(a,a+\delta)$

حال اگر a را از همسایگی متقارن حذف کنیم، به آن همسایگی متقارن محذوف می‌گوییم و به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم.

$(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ یا $0<|x-a|<\delta$ یا $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$

نکته: اگر $a < x < b$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی میانی (مرکز) این همسایگی $\frac{a+b}{۲}$ و شعاع آن $\frac{b-a}{۲}$ است، یعنی:

$$a < x < b \Rightarrow \left|x - \frac{a+b}{۲}\right| < \frac{b-a}{۲}$$