عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل ۱: دنباله‌ها

موضوع: دنباله‌ها

تعدادی از اعداد که به‌صورت یک رشته، پشت سر هم نوشته شده باشند را یک دنباله از اعداد می‌نامند. به عبارت دیگر دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن فقط اعداد طبیعی باشند. ($f(x):\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$) جمله‌ی n ام دنباله را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. مثلاً:

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{3}{4},\dots,\ a_n=\frac{n}{n+1},\dots$$

$$a_1=0,\ a_2=\frac{3}{5},\ a_3=\frac{8}{10},\dots,a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1},\dots$$

$$a_1=\frac{\sin 1}{1+\cos 1},\ a_2=\frac{\sin 2}{1+\cos 2},\dots,a_n=\frac{\sin n}{1+\cos n},\dots$$

نکته: اگر تعداد جملات یک دنباله متناهی باشد، در این حالت دنباله را دنباله‌ی متناهی می‌نامیم.

انواع دنباله‌ها:

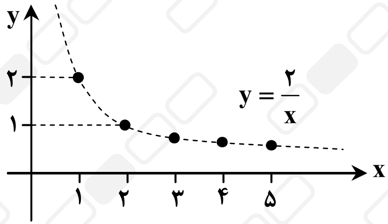
۱) دنباله‌ی ثابت: دنباله‌ای که تمام جملات آن یک عدد حقیقی و ثابت باشد را یک دنباله‌ی ثابت می‌نامیم.

۲) دنباله‌ی نوسانی (متناوب): دنباله‌ای که جملات آن یکی‌درمیان مثبت و منفی باشد.

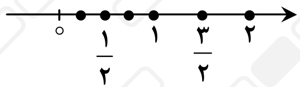
۳) دنباله‌ی بازگشتی: دنباله‌ای که هر جمله دنباله از جمله‌ی قبلی خود به دست آید را گویند. مانند دنباله‌های حسابی و هندسی

برای نمایش هندسی دنباله دو روش وجود دارد :

۱) با مشخّص کردن (n,a_n) در صفحه‌ی مختصّات که n را روی محور x و a_n را روی محور y در نظر می‌گیریم . با استفاده از این روش نقاط دنباله‌ی $a_n = f(n)$ را می‌توان نقاطی جدا از هم روی تابع پیوسته $y = f(x)$ در $x \geq ۱$ در نظر گرفت.



۲) با مشخّص کردن a_n روی یک محور افقی:



دنباله‌ی $\{a_n\}$ را همگرا گویند هرگاه در بی‌نهایت حد متناهی داشته باشد، اصولاً هرگاه صحبت از حد همگرایی دنباله به میان آمد، منظور حد دنباله در بی‌نهایت $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ می‌باشد. لذا اگر دنباله بخواهد همگرا باشد باید به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$ نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد. (L را نقطه‌ی همگرایی و ε را شعاع همگرایی می‌گوییم.)

دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا می‌نامند. دنباله‌های واگرا بر دو قسمند:

۱) یا حدشان در بی‌نهایت نامتناهی می‌شود، مانند: $a_n = n^2$

۲) یا در بی‌نهایت حد ندارند، مانند دنباله‌های نوسانی(دنباله‌هایی که نوسانشان را تا بی نهایت حفظ می‌کنند) مانند:

$$\{\cos n\pi\} = \left\{(-1)^n\right\}$$

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل ۱: دنباله‌ها

موضوع: دنباله‌های یکنوا

اگر برای هر n طبیعی در دنباله‌ی a_n، $a_{n+1} > a_n$ بود، دنباله را صعودی و اگر $a_{n+1} < a_n$ دنباله را نزولی می‌نامند . دنباله‌های صعودی یا نزولی را یکنوا می‌نامند.

تذکر: اگر چند جمله‌ی محدود از دنباله‌ای صعودی و بقیه جملات نزولی باشد (یا بالعکس) دنباله را غیریکنوا می‌نامند.

نکته: اگر همه جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ مثبت باشند و $\frac{a_{n+1}}{a_n} > ۱$ آنگاه دنباله صعودی است و اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} < ۱$ آن‌گاه $\{a_n\}$ نزولی است.

نکته: یکنوایی دنباله را می‌توان با استفاده از روش‌های پیدا کردن یکنوایی تابع نیز تحقیق نمود (اگر همواره $f'(n) \geq ۰$ آنگاه دنباله صعودی است و اگر همواره $f'(n) \leq ۰$، دنباله نزولی است)

برای بررسی همگرایی یا واگرایی یک دنباله در حالت کلی داریم:

۱) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ شود، گوییم دنباله همگرا است.

۲) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ شود یا

دو یا چند عدد متمایز $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ و یا حاصل عددی غیر مشخص شود، گوییم دنباله واگرا است.

نکات:

۱) دنباله‌ی عدد ثابت به همان عدد همگرا است.

۲) اگر p عددی گویا و مثبت و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^p} = 0$

۳) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

۴) حد یک چندجمله‌ای از n وقتی $n \to \infty$ برابر حد بزرگ‌ترین درجه‌ی آن چندجمله‌ای است.

۵)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 n^k + a_2 n^{k-1}+\cdots}{b_1 n^p + b_2 n^{p-1}+\cdots}=\begin{cases}\infty & k>p\\ \dfrac{a_1}{b_1} & k=p\\ 0 & k<p\end{cases}$$

۶) در دنباله‌های رادیکالی می‌توان از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کرد:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+an+b}\approx n+\frac{a}{2}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{an^2+bn+c}\approx\sqrt{a}\left(n+\frac{b}{2a}\right)\qquad (a>0)$$

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل ۱: دنباله‌ها

موضوع: جبر دنباله‌ها و همگرایی

۷) در دنباله‌هایی به فرم C^n (C یک عدد حقیقی و ثابت) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} C^n = \begin{cases} ۰ & |C| < ۱ \\ ۱ & |C| = ۱ \\ \text{واگرا} & C = -۱ \\ & |C| > ۱ \end{cases}$$

۸) در حد دنباله‌های نمایی داریم:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} (۱+\frac{۱}{n})^n = e$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} (۱+\frac{k}{an+b})^{cn+d} = e^{\frac{ck}{a}}$

۹) وقتی n سیر طبیعی خود را به بی‌نهایت طی کند، نامساوی زیر را که به نامساوی رشد معروف است، خواهیم داشت:

$$n^n > n! > \underset{a>۱}{a^n} > \underset{p>۱}{n^p} > n > \sqrt{n} > \log_n^k$$

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل ۱: دنباله‌ها

موضوع: جبر دنباله‌ها و همگرایی

اعمال بر روی دنباله‌ها: اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ترتیب به L_1 و L_2 همگرا باشند، آن‌گاه $\{a_n+b_n\}$، $\{a_n-b_n\}$، $\{a_n\cdot b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ به‌ترتیب همگرا به L_1+L_2، L_1-L_2، $L_1\cdot L_2$ و $\frac{L_1}{L_2}(L_2\neq 0)$ خواهند بود.

در صورت همگرایی و واگرایی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دنباله‌ها می‌توان به جدول زیر مراجعه کرد:

$\times \div$	$\pm$	عملیت جبری / نوع دنباله
همگرا	همگرا	همگرا - همگرا
باید بررسی شود	واگرا	همگرا - واگرا
باید بررسی شود	باید بررسی شود	واگرا - واگرا

قضیه فشردگی: اگر برای دنباله‌های $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ داشته باشیم $a_n \leq c_n \leq b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

نکته: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ و دنباله‌ی $\{b_n\}$ کراندار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ است.

تعریف : مجموعه‌ی $A \subset R$ را از بالا کراندار گویند، هرگاه $x \in R$ وجود داشته باشد که: به‌ازای هر $a \in A$, $a \leq x$

در این حالت x را یک کران بالای A در R می‌نامند. مجموعه‌ی $A \subset R$ را از پایین کراندار گویند، هرگاه $x \in R$ وجود داشته باشد که به ازای هر $a \in A$, $x \leq a$. در این صورت x را یک کران پایین A در R گویند.

مجموعه‌ی $A \subset R$ را کراندار گویند، هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد و در غیر این‌صورت آن را بی‌کران می‌نامند. $A \subset R$ کراندار است، اگر و فقط اگر عدد حقیقی مثبت k وجود باشد ، که به ازای هر $a \in A$، $|a \leq k|$ باشد.

هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی از R مانند A که کران پایین داشته باشد ، دارای بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیموم) است و هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی از R مانند A که کران بالا داشته باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالا (سوپریموم) است.

موضوع: یکنوایی دنباله‌ها

۱) دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی گویند هرگاه $a_{n+1} \geq a_n$، $\forall n \in \mathbb{N}$ یعنی:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

۲) دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی گویند هرگاه $a_{n+1} \leq a_n$، $\forall n \in \mathbb{N}$ یعنی:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

۳) تنها دنباله‌ی هم صعودی و هم نزولی، دنباله‌ی اعداد ثابت است.

۴) دنباله‌های نوسانی و دنباله‌هایی که تعدادی از جملات صعودی و تعداد نزولی باشند را دنباله‌های نه صعودی و نه نزولی گویند.

روش‌های تشخیص یکنوایی:

۱) مقایسه‌ی a_n و a_{n+1}

در این روش اگر $a_{n+1} - a_n \geq 0$ باشد، دنباله صعودی و اگر $a_{n+1} - a_n \leq 0$ باشد، دنباله نزولی است. همچنین اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ باشد، دنباله صعودی است و اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ باشد، دنباله نزولی است.

۲) استفاده از مشتق:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر به‌ازای $x \geq ۱$ باشد، آن‌گاه اگر $f'(x) \geq ۰$ تابع صعودی و لذا دنباله‌ی آن صعودی است و اگر $f'(x) < ۰$، تابع نزولی، لذا دنباله‌ی آن نیز نزولی است.

نکات:

۱) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{-a_n\}$ نزولی (صعودی) است.

۲) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و مثبت باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{-a_n\}$ نزولی و مثبت است.

۳) اگر در تستی فقط صعودی و نزولی بودن دنباله مد نظر بود (یعنی دنباله قطعاً یا نزولی یا صعودی بود) برای تشخیص آن اگر $\lim\limits_{n\to\infty} > a_۱$ بود دنباله صعودی و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < a_۱$ دنباله نزولی است.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی ۱ و ۲

فصل ۱: دنباله‌ها

موضوع: دنباله‌های کراندار

در صورتی که حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ یا $\pm\infty$ باشد، دنباله بی‌کران است و در غیر این صورت کراندار است.

اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ $n\in\mathbb{N}$، اعداد ثابت α و β پیدا شوند به گونه‌ای که به ازای همه nهای طبیعی: $\alpha \le a_n \le \beta$ آن‌گاه α را کران پایین و β را کران بالا می‌نامند.

☜ مثال : کران‌داری دنباله‌های زیر را بررسی کرده و کران‌های بالا و پایین را در صورت وجود بیان کنید.

$$\left\{\frac{۲n+۱}{n+۱}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲n+۱}{n+۱}\right)=۲$$

چون حد برابر ∞ نشد، پس کراندار است. جمله‌ی اول برابر $\frac{۳}{۲}$ و دنباله صعودی است. پس کران بالا ۲ و کران پایین $\frac{۳}{۲}$ است.

$$\left\{(-۱)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}\right\}=\{-۱,۰,۱,۰,\ldots\}$$

از جملات اول دنباله مشخص است که کل جملات دنباله اعداد $-۱,۱,۰$ هستند، پس این دنباله کراندار است و کران بالای آن ۱ و کران پایین آن ۱- است.

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

عنوان کتاب: ریاضی تجربی سال چهارم

فصل ۱ : دنباله‌ها

موضوع: دنباله‌های کراندار

قضیه: هر دنباله‌ی کران‌دار و یکنوا، همگراست.

نتایج:

۱) هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کران‌دار، همگراست و حد همگرایی آن کوچکترین کران بالای اعضای دنباله است.

۲) هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کران‌دار، همگراست و حد همگرایی آن بزرگترین کران پایین اعضای مجموعه است.

۳) هر دنباله‌ی همگرا، حتماً کران‌دار است، اما لزوماً یکنوا نیست.

اما هر دنباله‌ی کران‌دار، لزوماً همگرا نیست مانند $\left\{(-1)^n\right\}$