

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

هندسه (۱)

سال دوم آموزش متوسطه

رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری
نام کتاب: هندسه (۱) - ۲۳۳/۲

مؤلفان: زهرا گویا، سهیلا غلام‌آزاد، جعفر نیوشا، بیژن ظهوری زنگنه، جواد حاجی بابائی و روح‌الله جهانی‌پور

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وبسایت: www.chap.sch.ir

رسام کامپیوتری: هدیه بندار

صفحه‌آرا: طرفه سهائی

طراح جلد: علیرضا رضائی‌کُر

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

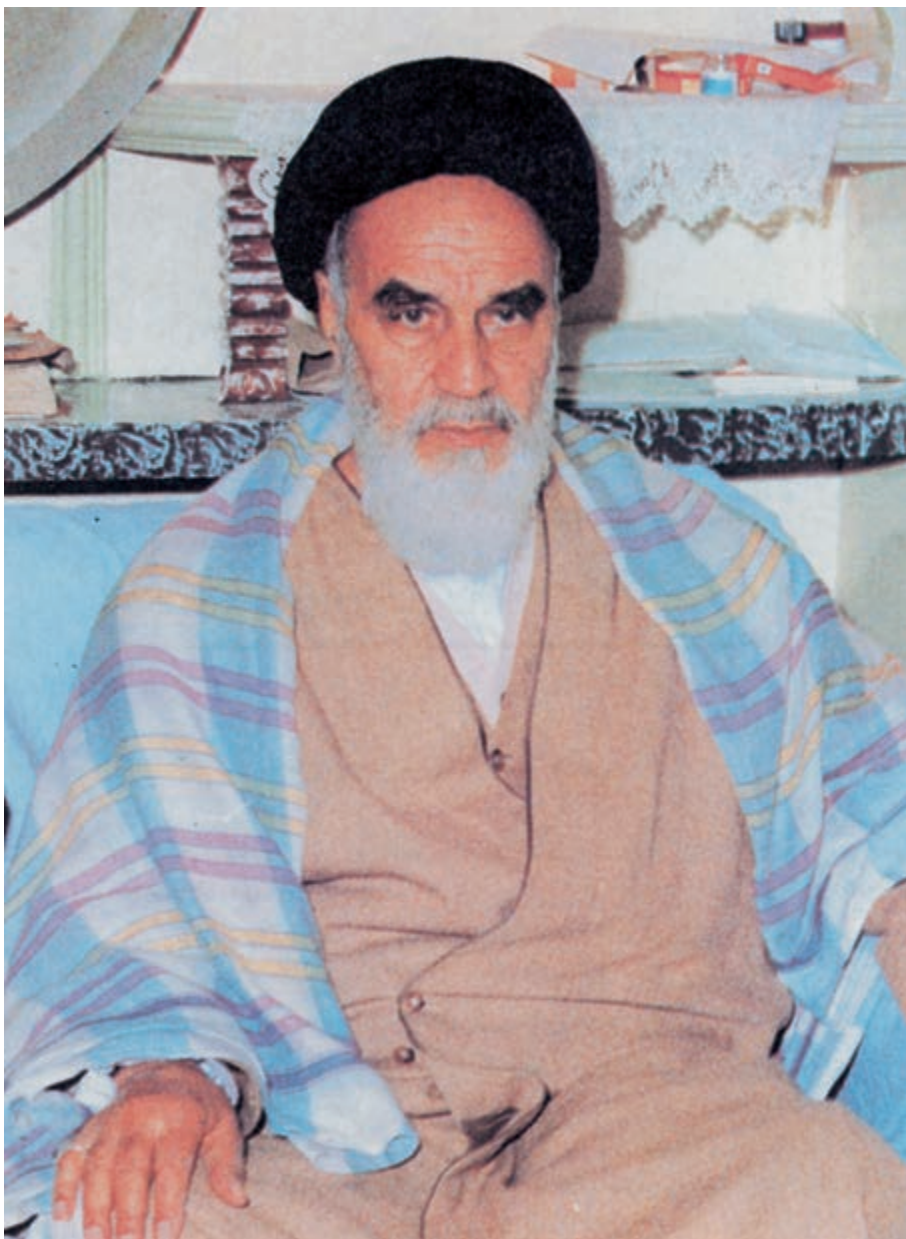
تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ بیستم ۱۳۹۳

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۵۸۹-۷ ISBN 964-05-0589-7



باید شما (معلمان) اینها (دانش‌آموزان) را از آن طبیعت منحطی که انسان را به انحطاط می‌کشد، آن حب جاه و حب مال و حب منصب احتراز دهید. اینها را از آن چیزهایی که خارِ راهِ انسان هستند، مانع ترقی انسان هستند احتراز بدهید... شما باید به اینها بفهمانید که زندگی شرافتمندانه، زندگی است.

پیشگفتار

به نام خداوند لوح و قلم حقیقت نگار وجود و عدم
خدایی که داننده‌ی رازهاست نخستین سرآغاز آغازهاست

*این کتاب عظیم هستی برای همیشه در جلوی چشم‌های ما گشوده شده است
و زبانی دارد، اما بدون دانستن آن، فهم حتی یک واژه‌ی هستی غیر ممکن
می‌نماید. آن زبان، ریاضی است!*

گالیه

ریاضی تنها به عنوان یک موضوع درسی دارای اهداف محدود، مطرح نیست. بسیاری از محققان بر این باورند که ریاضی، جریان طبیعی تفکر بشری و به قول گالیه، زبان فهمیدن هستی است. از همان زمانی که کودک با شعف الگوی ساده‌ای را در حین بازی تشخیص می‌دهد و بعد از مشاهده‌ی اشیاء در مورد چگونگی عملکرد آن‌ها حدس‌هایی می‌زند، در واقع به شیوه‌ای طبیعی به نخستین تجربه‌های خود از درک ریاضی دست می‌یابد. در ادامه‌ی کسب این تجربه‌ها، هندسه به عنوان ابزاری برای درک و توصیف فضایی که در آن قرار گرفته‌ایم، شاید شهودی‌ترین، ملموس‌ترین و واقعی‌ترین قسمت ریاضی باشد، و این تنها یک جلوه از هندسه است. بواقع، «به دلیل جنبه‌های چندگانه‌ی هندسه، ریاضیدان‌ها و آموزشگران ریاضی، به اتفاق آرا، شروع آموزش هندسه از سال‌های کودکی و ادامه‌ی آن را به شکلی متناسب، در تمام طول برنامه‌ی درسی ریاضی ضروری می‌دانند» (دورنمای هندسه برای قرن بیست و یکم، ۱۹۹۴). در یک جمع‌بندی کلی می‌توان گفت :

— هندسه علم شناخت دنیایی است که در آن زندگی می‌کنیم؛

— هندسه روش نمایش مفاهیم و فرآیندهای شاخه‌ی مختلف ریاضی و علوم است؛
— هندسه نقطه‌ی تلاقی بین ریاضی به عنوان یک علم مجرد و ریاضی به عنوان یک علم تجربی،
شهودی است؛

— هندسه مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی است؛
— هندسه تمثیلی برای یاد دادن و یاد گرفتن استدلال استنتاجی است؛
— هندسه وسیله‌ای مؤثر و مفید در ارائه کاربردهای بدیع و خلاق است.

بنابراین با توجه به وسعت هندسه و توانایی‌هایی که می‌تواند در افراد ایجاد کند، یادگیری آن به عنوان یکی از قسمت‌های اصلی ریاضی اهمیت بسیاری پیدا کرده است. به گفته ژان دیو دونه (۱۹۸۰)، امروزه «هندسه با بیرون آمدن از حصار تنگ و سنتی خود، قدرت‌های پنهان و تنوع و قابلیت سازگاری و انعطاف‌پذیری خارق‌العاده خود را آشکار کرده است، و کم‌کم به صورت یکی از بزرگ‌ترین و جهانی‌ترین ابزارها در تمام قسمت‌های ریاضی درمی‌آید.»

از ویژگی‌های دنیای کنونی و جامعه‌ی خودمان، رشد بی‌سابقه‌ی جمعیت و «افزایش سریع تعداد دانش‌آموزان دوره‌ی آموزش متوسطه است. در نتیجه، تکیه بر روش سنتی تدریس هندسه یعنی تنها به صورت انتزاعی به یک اقلیت انتخاب شده (بخشی از دانش‌آموزان ریاضی) در پاسخ به انتظارات اکثریت دانش‌آموزان نسل‌های جدید، روز به روز مشکل‌تر و نامناسب‌تر به نظر می‌رسد.» تمام دانش‌آموزان برای کسب توانایی و آمادگی لازم جهت ورود به عصر اطلاعات، باید به قابلیت‌های خود در انجام ریاضی اعتماد پیدا کنند و توانایی حل مسأله و استدلال کردن را به دست آورند. برای رسیدن به چنین سطحی، آنان باید از طریق کتاب‌های درسی ریاضی، در معرض تجربه‌های متنوع و مرتبط یادگیری قرار گیرند تا با توسعه‌ی عادات ریاضی در خود، قادر به درک و قدردانی از نقش تعیین‌کننده‌ی ریاضی در مناسبت‌های انسانی باشند. همچنین، برای ریاضی به دلیل کارایی، زیبایی و انسجام درونی آن، ارزش قائل شوند و با علاقه در یادگیری آن کوشش نمایند. این اهداف، به شرطی تحقق می‌یابند که دانش‌آموزان به کشف روابط ریاضی تشویق شوند. در طی این فرآیند، باید به آن‌ها فرصت داده شود تا اشتباه کرده و اشتباهات خود را تصحیح نمایند، حدسیه‌سازی کنند و آن‌ها را به آزمایش بگذارند، سپس به استدلال در زمینه‌ی اعتبار آن‌ها بپردازند تا در نهایت، به قابلیت‌های خویش در حل مسائل پیچیده اعتماد پیدا کنند.

در همین راستا، توجه اساسی مؤلفان در تدوین کتاب هندسه، ایجاد فرصت‌های یادگیری برای تمام دانش‌آموزان به منظور تحقق مرحله‌ای هدف‌های ذکرشده بوده است. به اعتقاد ما، باید این توانایی‌ها پرورش یابند و جزء زندگی عادی دانش‌آموزان قرار گیرند تا آن‌ها بتوانند با کشف، حدسیه‌سازی، استدلال منطقی و استفاده از روش‌های گوناگون، به حل مسائل از قبل پیش‌بینی نشده و غیربدیهی اما واقعی خود بپردازند. در حقیقت، «در تدریس [ریاضی]، نه تنها قابل قبول بلکه مطلقاً ضروری است که در شروع،

کمتر انتزاعی بوده و مرتب به کاربردها بیردازیم، و فقط زمانی به طور تدریجی به بالایش ایده‌ها و تجرید برسیم که دانش‌آموز برای درک آن‌ها توانمند شده باشد». ما نیز در تألیف این کتاب تلاش کرده‌ایم از شهود شروع کرده و به تدریج به سمت تجرید برویم. همچنین، سعی بر این بوده است تا جایی که برنامه‌ی این درس اجازه می‌دهد، فرصت‌های مناسبی برای دانش‌آموزان ایجاد کنیم تا آن‌ها به الگوسازی از پدیده‌هایی که روزانه با آن‌ها روبرو می‌شوند، بیردازند؛ چرا که بواقع، توانایی ما در تشخیص، تفسیر و خَلقِ الگوها، کلید فهمیدن دنیای اطرافمان است. به همین دلیل، در تمام کتاب، هدف این بوده است که مستقیم و غیرمستقیم؛ به دانش‌آموزان بگوییم، «انجام دهید؛ بسازید؛ توجّه کنید؛ منظم کنید؛ و فقط آن موقع است که به استدلال [دقیق] می‌پردازید». (ویلیام سائر، ۱۹۵۹)

همچنین، یکی دیگر از راهنماهای ما در تألیف این کتاب، بیانیه‌ی امضا شده توسط هفتاد و پنج تن از مشهورترین ریاضیدان‌های دنیا در سال ۱۹۶۲ بوده است که در آن تأکید شده: «معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینه‌ی قبلی کافی در خصوص حقیقت‌های ملموس، معرفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه‌ای از تجرید وجود ندارد، یا عجله در معرفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می‌توانند دانش‌آموزان را به تحرّک فکری و فعالیت وادارند، در واقع صورت‌گرائی ناپخته و بی‌استفاده‌ای است که ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منتهی شود. معرفی خام و زودرس انتزاع، به خصوص با مقاومتِ ذهن‌های نقّاد و کنجکاو روبرو می‌شود، ذهن‌هایی که قبل از پذیرش انتزاع، آرزو دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی منطبق است و چگونه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.» به همین دلیل و به خاطر احتراز از تجرید زودرس و ایجاد علاقه و انگیزه در تمام دانش‌آموزان، در مواقع مناسب، از آوردن بعضی استدلال‌های دقیق ریاضی اجتناب کرده یا وارد جزئیات اثبات، نشده‌ایم. به علاوه، در نگارش کتاب، همه جا با فرضِ آشنایی دانش‌آموز با مفاهیم ارائه شده در کتاب‌های دوره‌ی راهنمایی تحصیلی، مطالب مزبور جهت یادآوری و توسعه‌ی مطالب بعدی مورد استفاده قرار گرفته و در فصل اول از اثبات مجدد قضایا خودداری شده است.

از همکاران عزیز استدعا داریم که امکان انجام فعالیت‌ها در کلاس در قالب گروه‌های کوچک را فراهم آورند تا روح مشارکت و همکاری در آن‌ها تقویت شود. ممکن است در ابتدای کار، این روند، به دلیل کم رنگ بودن زمینه‌ی مشارکت در کلاس‌های درس، از نظر زمانی وقت گیر باشد. اما تحقیقات متعدّد نشان می‌دهند که با در پیش گرفتن این روند، در زمانی نه چندان طولانی، روحیه‌ی کار گروهی در کلاس ایجاد شده و پس از آن، زمان به ظاهر از دست رفته را می‌توان به سرعت جبران کرد. به علاوه، با انجام چنین فعالیت‌هایی، دانش‌آموزان به اندازه‌ی کافی برای انجام مسائل پایان هر بخش توانمند شده و حل آن‌ها وقت کمتری را به خود اختصاص خواهد داد. همچنین ذکر این نکته ضروری است که ارزشیابی می‌باید به طور مستمر صورت گرفته و بررسی چگونگی انجام فعالیت‌ها در قالب کار گروهی، بخشی از ارزشیابی را تشکیل دهد. در ضمن، در امتحانات و ارزیابی‌های کلاسی، تکیه بر سنجش

توانایی‌های حل مسأله و به‌کارگیری مفاهیم، تعاریف و قضایای کتاب می‌باشد.

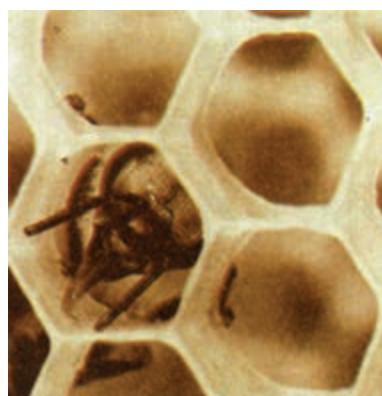
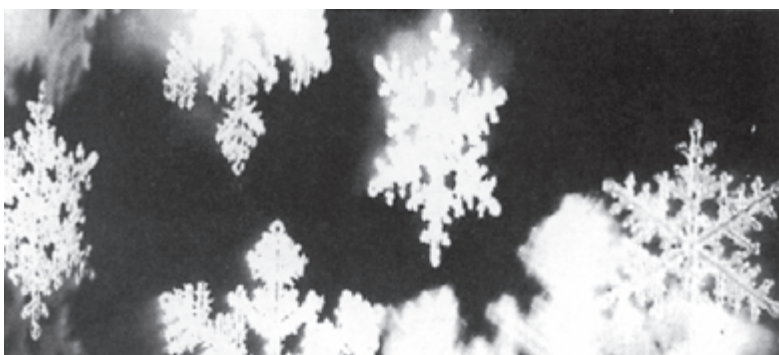
در پایان، مؤلفان وظیفه‌ی خود می‌دانند از سرکار خانم حمیده داریوش همدانی، خانم فرحناز یوسفی، آقای مرتضی حسینی نسب و تمامی دیگر کسانی که با دلسوزی و وسواس، پیش‌نویس‌های کتاب را مورد تجزیه و تحلیل و نقادی قرار داده و با نظرات سازنده‌ی خود ما را در تصحیح و ویرایش کتاب یاری داده‌اند تشکر کنند. همچنین، شایسته است از اعضای محترم شورای ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری جهت نقد، بررسی و تصویب ریز موادّ و ارائه‌ی نظرات ارزنده در تألیف کتاب قدردانی شود.

مؤلفان

محلان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را در باره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

هندسه و استدلال

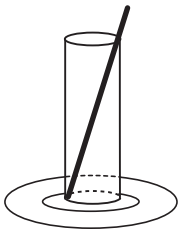


۱-۱- کشف اطلاعات از طریق مشاهده

تاکنون با بسیاری از مفاهیم هندسی از طریق مشاهده آشنا شده‌اید. گردی توپ‌ها، چرخ‌ها و سکه‌ها را دیده‌اید. کتاب‌های مستطیل شکل را خوانده‌اید. از قیف‌های مخروطی شکل بستنی خورده‌اید و احتمالاً شکل‌های زیبای دانه‌های برف و مارپیچ ظریف چندضلعی گونه‌ی تار عنکبوت و کندوی زنبور عسل شما را به شگفتی واداشته‌اند! این گونه مشاهدات، فرصت‌های مناسبی برای درک

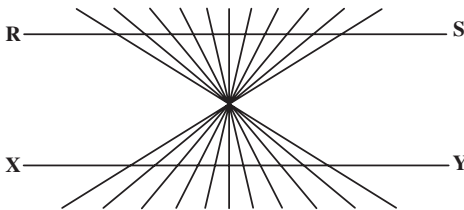
مفاهیم هندسی از قبیل شکل و اندازه را به وجود می آورند. با این حال، مشاهدات ما صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می کنند.

مثال ۱: در شکل ۱، قطر بشقاب بیشتر است یا بلندی لیوان؟



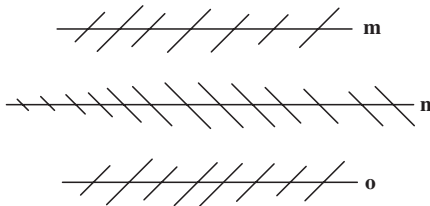
شکل ۱

مثال ۲: آیا RS و XY خط‌های راست هستند؟



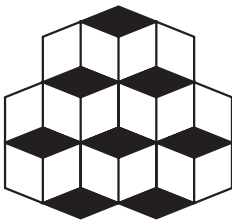
شکل ۲

مثال ۳: آیا خط‌های m ، n و o موازی هستند؟



شکل ۳

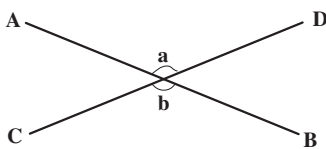
مثال ۴: شش بلوک در شکل وجود دارد یا هفت بلوک؟



شکل ۴

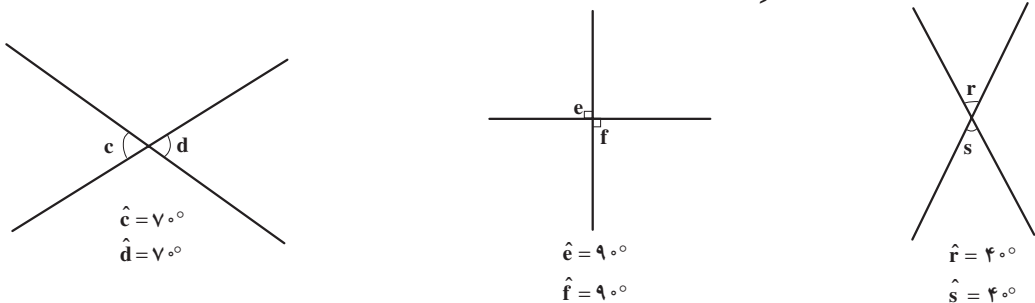
۲-۱- کشف اطلاعات از طریق تجربه

سارا هنگام نگاه کردن به خط‌های متقاطع شکل (۵)، به نظرش رسید که زاویه‌ی a با زاویه‌ی b برابر است. برای اطمینان، با استفاده از یک نقاله آن دو زاویه را اندازه‌گیری کرد و دریافت که هریک از آن‌ها تقریباً 130° هستند. آن‌گاه در فکر فرو رفت که آیا زاویه‌های متقابل به رأس همیشه مساوی



شکل ۵

هستند؟ او چند جفت خطوط متقاطع مانند شکل‌های صفحه‌ی بعد رسم کرد و مجدداً یک جفت از زاویه‌های متقابل به رأسِ هریک از آن‌ها را اندازه‌گیری کرد، سپس نتایج را یادداشت نمود.



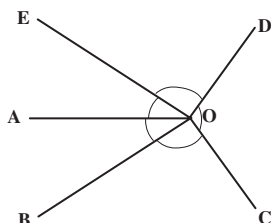
شکل ۶

او بعد از این که این آزمایش را چندین بار تکرار کرد، با توجه به نتایج به‌دست آمده پیش‌بینی کرد که وقتی دو خط یکدیگر را قطع کنند، احتمالاً زاویه‌های متقابل به رأس پدید آمده همیشه مساوی یکدیگر خواهند بود. او به عنوان یک دانش‌آموز خوش‌فکر، کلمه‌ی «احتمالاً» را به کار برد، زیرا می‌دانست در هر اندازه‌گیری به دلایل مختلف از جمله لرزش دست و نوع ابزار، خطا وجود دارد. در نتیجه با اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر، ممکن است زاویه‌ها یک مقدار جزئی با یکدیگر تفاوت داشته باشند، همچنین می‌دانست که اگر زاویه‌های متقابل به رأسی پیدا شوند که مساوی یکدیگر نباشند، پیش‌بینی او رد خواهد شد (چرا؟).

به هر حال سارا آن‌قدر هوشیار بود که به نتایجی که هنوز تضمینی برای درستی آن‌ها وجود ندارد استناد نکند. اما احساس کرد که تجربه‌اش با ارزش است، زیرا ممکن است به کشف یک نتیجه‌ی مهم هندسی بیانجامد.

فعالیت ۱-۱ به شما این فرصت را می‌دهد تا فرآیند تجربه‌ی سارا، یعنی جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهده و اندازه‌گیری را در موارد مختلف تکرار کنید.

فعالیت ۱-۱



۱. الف) اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{DOE}$ ، $\hat{COD}$ ، $\hat{BOC}$ ، $\hat{AOB}$

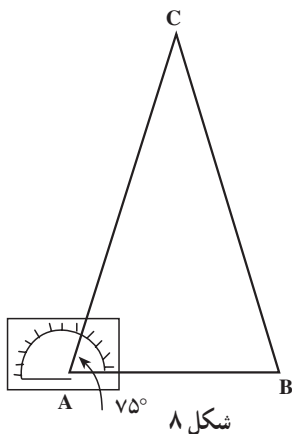
و $\hat{EOA}$ را برحسب درجه به‌دست آورید. مجموع همه‌ی زاویه‌های

بالا که دورتا دور O هستند، چند درجه است؟

شکل ۷

ب) نقطه‌ی دیگری مانند O' در صفحه در نظر بگیرید و زاویه‌های $\hat{CO'E}$ ، $\hat{BO'C}$ ، $\hat{AO'B}$ و $\hat{EO'A}$ را با اندازه‌ای دلخواه به رأس O' رسم کنید. سپس زاویه‌ها را اندازه گرفته و نتایج را باهم جمع کنید.

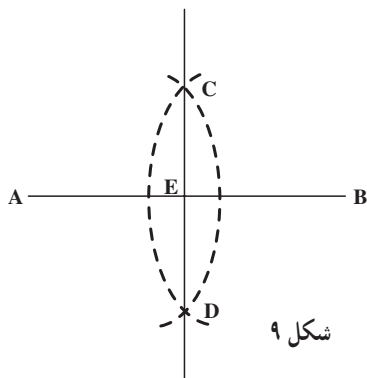
پ) از قسمت‌های (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای را می‌توانید پیش‌بینی کنید؟
۲. چند مثلث رسم کنید. مجموع زاویه‌های هریک از مثلث‌ها را بیایید. حدس شما در مورد مجموع زاویه‌های هر مثلث دیگری غیر از این مثلث‌ها چیست؟
۳. الف) با استفاده از نقاله، مثلثی رسم کنید که دو زاویه 75° داشته باشد. طول ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.



ب) مثلث دیگری رسم کنید که دو زاویه 40° داشته باشد. ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و بازهم نتیجه را یادداشت کنید.
پ) چند مثلث دیگر رسم کنید که هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ضلع‌های آن‌ها را نیز اندازه بگیرید. با توجه به نتایجی که به‌دست آوردید، آیا می‌توانید یک نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کنید؟

۴. روی یک صفحه‌ی کاغذ، سه نقطه‌ی غیر واقع در یک امتداد قرار دهید و آن‌ها را به ترتیب A، B و C بنامید. AB، BC و AC را رسم کنید. طول سه پاره‌خط را اندازه گرفته، مجموع دو ضلع کوتاه‌تر را به‌دست آورید. آیا این مجموع بیشتر از طول پاره‌خط بزرگ‌تر است؟ این آزمایش را برای نقطه‌های دیگری تکرار کنید و هربار نتایج به‌دست آمده را یادداشت کنید. اگر برای هزار مثلث به‌نتیجه مشابه برسید آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که این

نتیجه‌گیری کلی برای همه‌ی مثلث‌ها درست است؟
۵. الف) پاره‌خط AB را رسم کنید.



ب) سوزن پرگار خود را در نقطه‌ی A قرار دهید و کمائی به شعاع بیش از نصف طول AB، چنان‌که در شکل ۹ نشان داده شده رسم کنید.

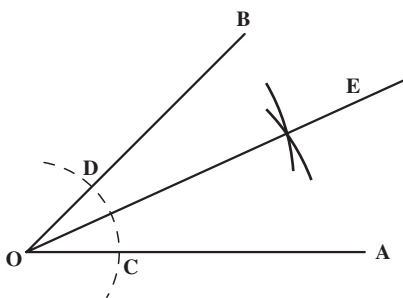
پ) به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم کنید که کمان اول را در نقاط C و D قطع کند.

ت) با استفاده از خط کش خط CD را رسم کنید و محل برخورد CD و AB را E بنامید.

ث) طول‌های AE و BE را با خط کش اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

ج) زاویه‌های AEC و BEC را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

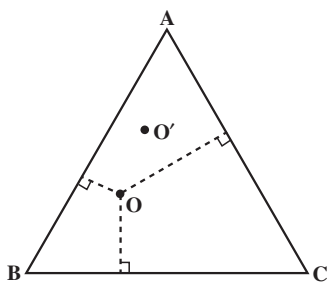
چ) پاره‌خط‌های دیگری رسم کنید و مراحل (ب) تا (ج) را در مورد آن‌ها انجام دهید. سپس نتایج به دست آمده در هر مورد را با نتیجه‌ی قبلی مقایسه کنید. آیا نتایج به دست آمده دارای الگوی منظمی هستند؟



شکل ۱۰

۶. زاویه‌ی AOB را مانند شکل ۱۰ رسم کنید.

به مرکز O کمانی رسم کنید تا OB را در D و OA را در C قطع کند. به مراکز C و D کمان‌هایی با شعاع‌های مساوی رسم کنید تا یکدیگر را در E قطع کنند. OE را رسم کنید. چه مطلبی در مورد $\angle AOE$ و $\angle BOE$ درست به نظر می‌رسد؟ نتیجه خود را با اندازه‌گیری زاویه‌ها به وسیله‌ی نقاله امتحان کنید. این تجربه را با زاویه‌هایی با اندازه‌های مختلف تکرار کنید.



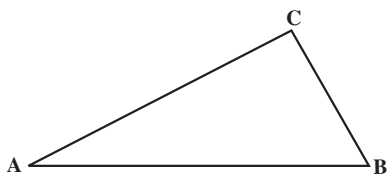
شکل ۱۱

۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید. نقطه‌ی

دلخواه O را درون مثلث اختیار کنید. سپس فاصله‌ی نقطه‌ی O را تا سه ضلع مثلث به دست آورده، مجموع این فاصله‌ها را محاسبه کنید. سه نقطه‌ی دیگر درون مثلث انتخاب کنید و مجموع فاصله‌های آن‌ها را نیز تا سه ضلع مثلث حساب کنید. آیا الگوی منظمی در نتایج به دست آمده دیده می‌شود؟ راجع به آن فکر کنید.

۸. مثلث ABC را چنان رسم کنید که در آن $\hat{A}$ کوچکتر

از $\hat{B}$ باشد. اضلاع BC و AC را اندازه بگیرید. کدام یک بزرگتر است؟ مثلث دیگری رسم کنید که در آن $\hat{A}$ بزرگتر از $\hat{B}$ باشد و تعیین کنید در آن AC بزرگتر است یا BC. چند مثلث دیگر رسم کنید



شکل ۱۲

که در آن‌ها $\hat{A}$ بزرگتر از $\hat{B}$ و یا برعکس، $\hat{B}$ بزرگتر از $\hat{A}$ باشد. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث پیش‌بینی می‌کنید؟

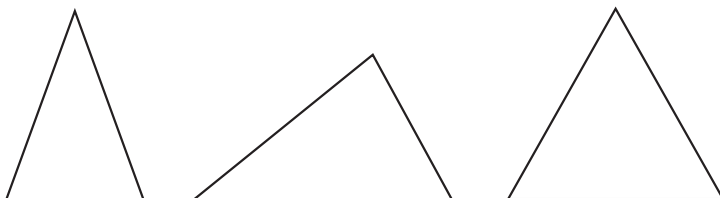
در فعالیت‌های بالا، با بررسی حالت‌های مختلف

چند نتیجه کلی را پیش‌بینی کردیم. چنین استدلالی،

استدلال استقرایی خوانده می‌شود. باید توجه داشته باشیم که این استدلال نتایجی را که از طریق آن به‌دست می‌آیند، اثبات نمی‌کند.

۲-۱ فعالیت

۱. به کمک خط‌کش و پرگار عمود منصف ضلع‌های مثلث‌های زیر را رسم کنید (این رسم‌ها را در کتاب انجام دهید).



شکل ۱۳

۲. در هر یک از موارد فوق مشخص کنید نقطه‌ی برخورد عمود منصف‌ها نسبت به مثلث‌ها چه وضعی دارند؟

۳. مثلث دلخواه دیگری رسم کنید و بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تحقیق نمایید.

۴. با توجه به تجربیات فوق، به نظر شما محل برخورد عمود منصف‌های ضلع‌های یک مثلث نسبت به آن چه وضعی دارد؟

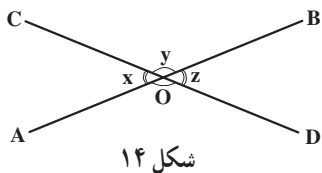
۵. مثلث ABC را چنان رسم کنید که $AB = 6\text{cm}$ ، $BC = 3\text{cm}$ و $AC = 4\text{cm}$. سپس

بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تکرار کنید. آیا نتیجه‌ی به‌دست آمده از این بند، نظر شما در بند ۴ را تأیید می‌کند؟

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل مشاهده کردید، نتیجه‌ی به‌دست آمده از بررسی چند مورد، ممکن است در همه‌ی موارد برقرار نباشد. بنابراین از طریق استدلال استقرایی نمی‌توان نتایج قطعی به‌دست آورد. با این حال، فرآیند استدلال استقرایی با تقویت شهود و ارائه اطلاعات مفید ما را قادر می‌سازد حدس‌های احتمالاً درستی بزنیم، ولی برای اطمینان از درستی حدس‌ها به روش‌های دیگری از استدلال نیاز داریم.

مثال ۵: سارا با جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهدات و اندازه‌گیری‌های خود، یعنی به کمک استدلال استقرایی پیش‌بینی کرد که هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس برابرند. اما او نمی‌توانست برای نشان دادن درستی پیش‌بینی خود هر دو خط متقاطع ممکن را رسم کند و در نتیجه نمی‌توانست با اطمینان بگوید که پیش‌بینی او در همه‌ی موارد دیگر نیز درست است. پس او سعی کرد با استناد به حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته بود، نشان دهد که پیش‌بینی او همواره درست است. یعنی زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع باهم برابرند.

استدلال سارا: شکل ۱۴ دو خط متقاطع دلخواه را نشان می‌دهد. چون $\hat{A}OB$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است.



$$x + y = 180^\circ \quad (1)$$

چون $\hat{COD}$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

$$y + z = 180^\circ \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) داریم

$$x + y = y + z \quad (3)$$

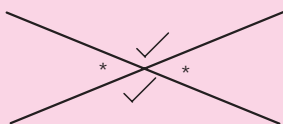
$$x = z$$

در نتیجه :

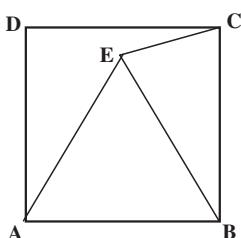
بنابراین $\hat{AOC} = \hat{DOB}$. به طریق مشابه، $\hat{COB} = \hat{AOD}$.
استدلال ارائه شده در مثال بالا، نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایق است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

نتایج مهم و مفیدی که از استدلال استنتاجی به دست می آید قضیه نامیده می شوند.



قضیه ۱: زاویه های متقابل به رأس
زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط
مقاطع با یک دیگر مساویند.



شکل ۱۵

مثال ۶: چهارضلعی ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی الاضلاع است (شکل ۱۵). نشان دهید که مثلث BCE متساوی الساقین است.

حل: چون چهارضلعی ABCD، مربع است

$$AB = CB \quad (۱)$$

چون مثلث ABE متساوی الاضلاع است

$$AB = EB \quad (۲)$$

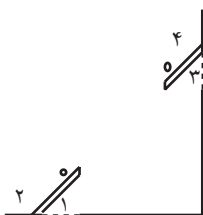
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$CB = EB$$

بنابراین، مثلث BCE متساوی الساقین است.

مثال ۷: داخل اتاقی دو در وجود دارد که هر دوی

آنها به یک اندازه باز شده اند (شکل ۱۶)، یعنی $\hat{1} = \hat{3}$.
می خواهیم با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهیم که $\hat{2} = \hat{4}$.



شکل ۱۶

حل: چون $\hat{1}$ و $\hat{2}$ مکمل یکدیگر هستند

$$\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{2} = 180^\circ - \hat{1}$$

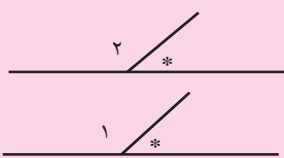
چون $\hat{3}$ و $\hat{4}$ مکمل یکدیگر هستند

$$\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$$

$$\hat{4} = 180^\circ - \hat{3}$$

(۲)

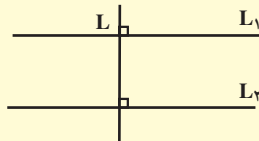
چون $\hat{1} = \hat{3}$ ، از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که عبارت‌های سمت راست مساوی یکدیگرند. بنابراین $\hat{2} = \hat{4}$.



قضیه‌ی ۲: دو زاویه‌ی مکمل
 اگر دو زاویه مساوی باشند، مکمل‌های
 آن‌ها نیز با یکدیگر مساویند. $\hat{1} = \hat{2}$

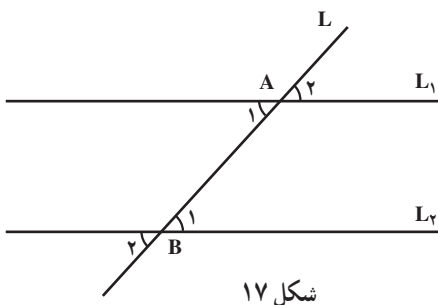
یکی از حقایقی که در ریاضیات دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شدیم. به صورت زیر است:

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.



به عنوان مثال، اگر دو خط L_1 و L_2 باهم موازی باشند و خط L بر L_1 عمود باشد، بر L_2 هم عمود خواهد بود. در این حالت ۸ زاویه‌ی قائمه پدید می‌آید که همه با هم برابرند.

این یکی از حقایقی است که درستی آن را پذیرفته‌ایم، اما اگر خطی دو خط موازی را طوری قطع کند که بر آن‌ها عمود نباشد، زاویه‌های پدید آمده چگونه‌اند؟



شکل ۱۷

در شکل روبه‌رو دو خط L_1 و L_2 ، باهم موازی‌اند و خط L این دو خط را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. در سال‌های قبل با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه و حقیقی که در بالا بدون اثبات پذیرفته‌ایم، ثابت کردیم که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است.

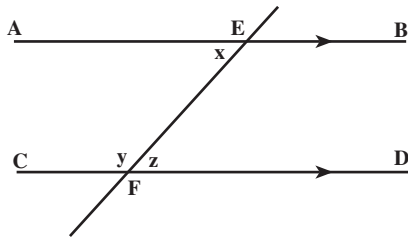
قضیه ۳: خطوط موازی

اگر خط L دو خط L_1 و L_2 را قطع کند و زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ را پدید آورد (شکل ۱۷):

الف) اگر L_1 و L_2 باهم موازی باشند، آن گاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است.

ب) اگر $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ باشد، آن گاه L_1 و L_2 باهم موازی‌اند.

تمرین. اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا دیگری را هم قطع خواهد کرد؟ چرا؟
مثال ۸: با توجه به قضیه فوق، نشان دهید که مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی AEF و CFE



یعنی x و y برابر 180° است.

حل: چون $\hat{CFD}$ نیم‌صفحه است، پس

$$y + z = 180^\circ$$

هم‌چنین بنابر قضیه خطوط موازی،

$$x = z$$

بنابراین:

$$y + x = 180^\circ$$

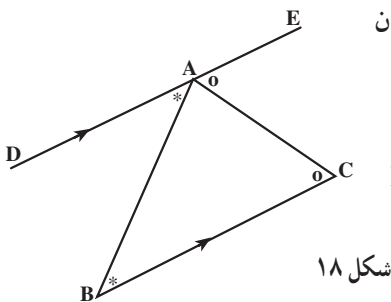
مثال ۹: با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان

دهید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

حل: مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم (شکل

۱۸). از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم و آن را DE

می‌نامیم. چون DE موازی BC است.



شکل ۱۸

$$\hat{EAC} = \hat{C} \quad (1)$$

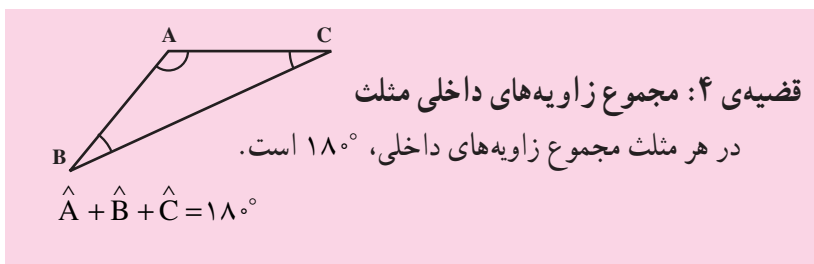
$$\hat{DAB} = \hat{B} \quad (2)$$

از طرف دیگر، چون $\hat{DAE}$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین:

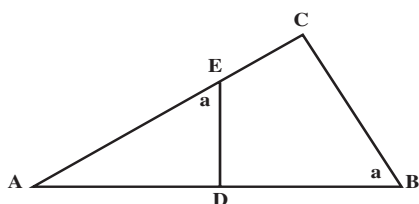
$$\hat{DAB} + \hat{BAC} + \hat{EAC} = 180^\circ$$

از روابط (۱) و (۲) مقدارهای مساوی $\hat{EAC}$ و $\hat{DAB}$ را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه:

$$\hat{B} + \hat{BAC} + \hat{C} = 180^\circ$$



در این جا، با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دادیم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، صرف‌نظر از نوع آن 180° است. چنان‌که در بند ۲، فعالیت ۱-۱، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث‌های متعددی را به‌دست آوردیم و با توجه به یکسان بودن نتایج به‌دست آمده، این نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کردیم.



شکل ۱۹

مثال ۱۰: در شکل ۱۹، $\hat{AED} = \hat{ABC} = a$.

با استفاده از قضیه فوق نشان دهید که، $\hat{ADE} = \hat{ACB}$.

حل: در مثلث ADE

$$\hat{A} + a + \hat{ADE} = 180^\circ \quad (۱)$$

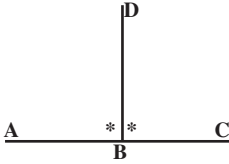
در مثلث ACB

$$\hat{A} + a + \hat{ACB} = 180^\circ \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{ADE} = \hat{ACB}$$

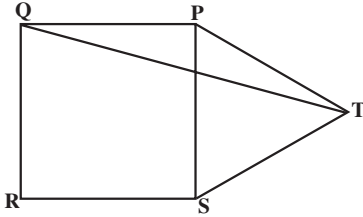
مسائل



۱. از نقطه‌ی B روی خط AC پاره خط BD را

طوری رسم کرده‌ایم که $\hat{ABD} = \hat{CBD}$. چرا

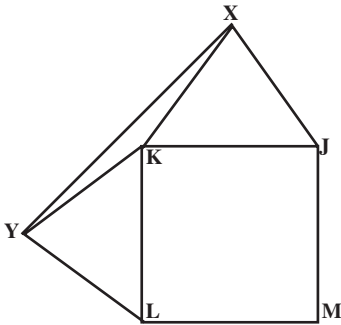
$\hat{ABD} = 90^\circ$ ؟



۲. PQRS یک مربع و PST یک مثلث

متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT

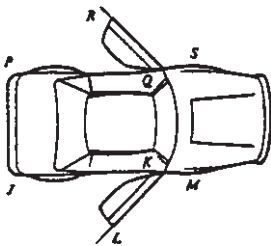
متساوی‌الساقین است؟



۳. JKLM یک مربع و مثلث‌های JXL و KYL

هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY

متساوی‌الساقین است.



۴. با توجه به تصویر ماشین $\hat{JKL} = \hat{PQR}$ ، چرا

$\hat{RQS} = \hat{LKM}$ ؟ دلیل خود را بنویسید. (دو طرف ماشین را دو خط فرض کنید.)

۵. مجموع دو زاویه 90° است. مجموع مکمل‌های

آنها چند درجه است؟

۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند. در حالت‌های زیر،

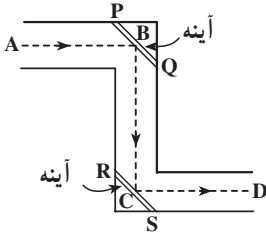
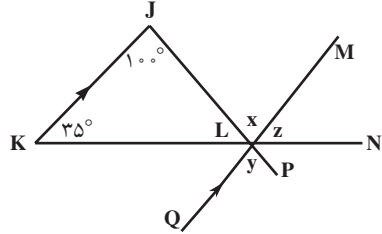
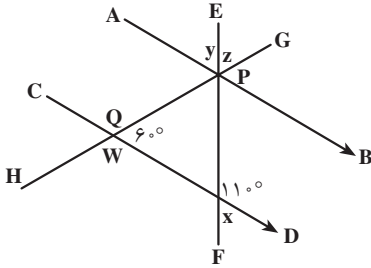
اندازه‌ی هریک را مشخص کنید.

الف) دو زاویه مساوی باشند.

ب) یک زاویه دو برابر دیگری باشد.

پ) یک زاویه n برابر دیگری باشد.

۷. اندازه‌ی زاویه‌هایی را که به وسیله‌ی حروف کوچک مشخص شده‌اند، پیدا کنید.



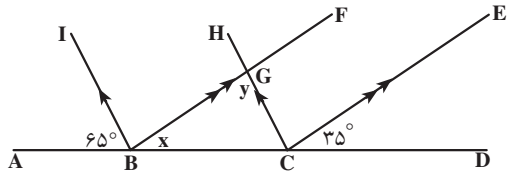
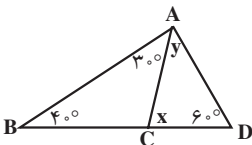
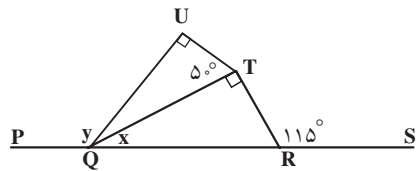
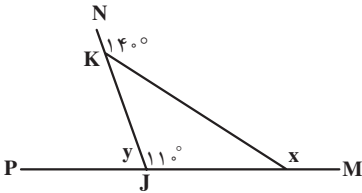
۸. در ساختمان پریسکوپ یک جفت آینه‌ی موازی وجود

دارد. به این ترتیب شعاع‌های نور که در بالا وارد پریسکوپ

می‌شوند، موازی شعاع‌های نوری هستند که در پایین از پریسکوپ

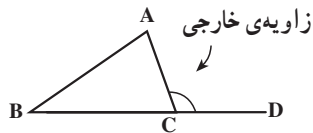
خارج می‌شوند. زاویه‌های مساوی در شکل را نام ببرید.

۹. در هریک از شکل‌های زیر، مقادیر x و y را پیدا کنید.



۱۰. نشان دهید که در مثلث دلخواه ABC ،

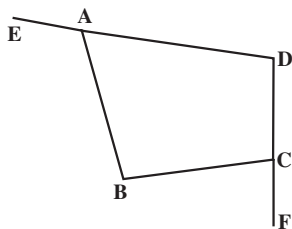
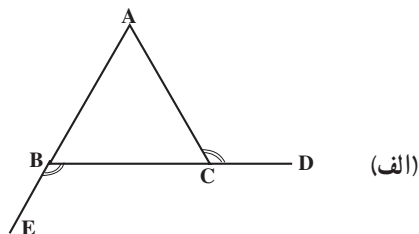
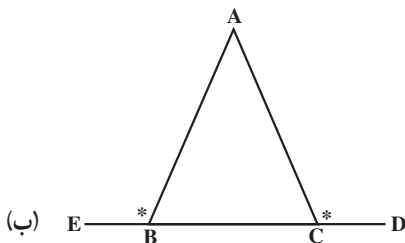
$$\hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$



(زاویه‌ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می‌شود، زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود.)

۱۱. با توجه به تساوی زاویه‌های مشخص شده در شکل زیر، علت تساوی $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

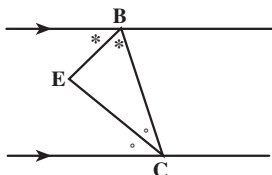
را توضیح دهید.



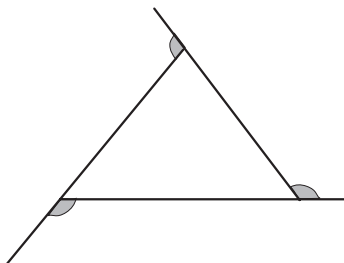
۱۲. با توجه به شکل مقابل درستی رابطه‌ی زیر را

نشان دهید.

$$\hat{EAB} + \hat{BCF} = \hat{B} + \hat{D}$$



۱۳. در شکل مقابل، ثابت کنید: $\hat{E} = 90^\circ$



۱۴. مجموع زاویه‌های خارجی مثلث روبه‌رو را

بیابید. آیا این یافته در مورد مجموع زاویه‌های خارجی

هر مثلث درست است؟ جواب خود را با ذکر دلیل

بنویسید.

۱۵. تفاوت عمده میان استدلال استقرایی و استنتاجی را بنویسید و برای هریک، مثالی بیاورید.

۱-۳ استدلال در هندسه

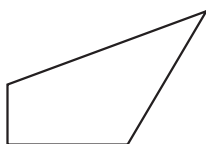
تعریف مربع را در نظر بگیرید، «مربع مستطیلی است که ضلع‌های آن با یکدیگر برابرند». لازمه‌ی فهمیدن این تعریف، دانستن معنای دقیق واژه‌های «مستطیل» و «ضلع» است. به این ترتیب برای تعریف مربع به تعریف‌های دیگری نیازمندیم. به عنوان مثال،



مستطیل متوازی‌الاضلاع با چهار
زاویه‌ی مساوی است.



متوازی‌الاضلاع چهارضلعی
است که ضلع‌های مقابل آن موازی
یکدیگرند.



چهارضلعی شکلی با چهارضلع است.



شکل یک ...

فرض کنید شکل را به عنوان مجموعه‌ی نقاط تعریف کنیم، چون هر تعریف شامل واژه‌هایی است که معنی آن‌ها باید دقیقاً روشن باشد، در نتیجه این سؤال پیش می‌آید که تعریف مجموعه و نقطه چیست؟ با ادامه‌ی این فرآیند به بن‌بست می‌رسیم؛ زیرا این عمل را نمی‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد. علت این محدودیت آن است که همه‌ی واژه‌ها قابل تعریف نیستند. در نتیجه، برای رهایی از این بن‌بست، واژه‌ها و مفاهیمی چون شکل، مجموعه، نقطه و خط را با توجه به این که تعریف صریحی برای آن‌ها نداریم، به عنوان تعریف نشده‌ها می‌پذیریم.



شکل

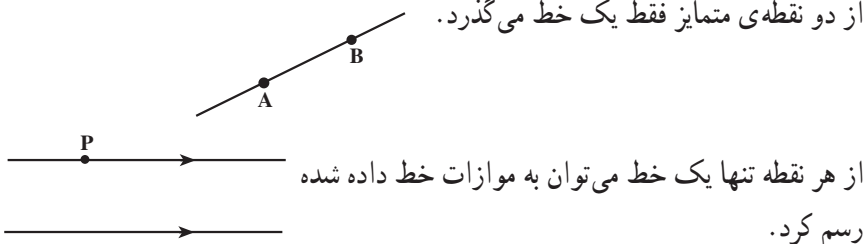


خط

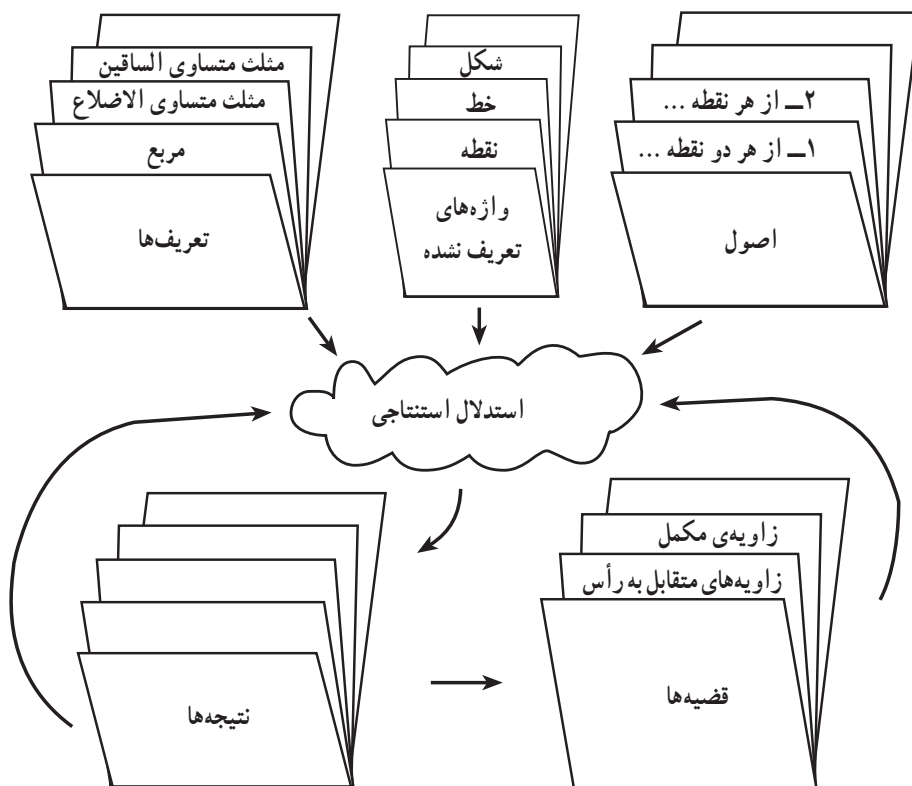


نقطه

همچنین در مثال‌های قبل، درستی بعضی از ویژگی‌های هندسی را به وسیله‌ی استدلال استنتاجی نشان دادیم. در آن مثال‌ها، استنتاج‌های ما براساس حقایق بود که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم. این حقایق یا عبارت‌های درست، اصول^۲ نامیده می‌شوند. به عنوان مثال، از دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط می‌گذرد.



وقتی در هندسه استدلال استنتاجی به کار می‌بریم، می‌توانیم از تعریف‌ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌ها برای رسیدن به نتیجه استفاده کنیم.



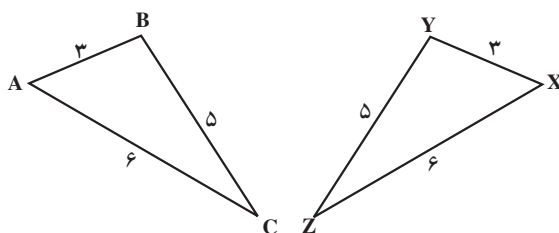
۱- Property

۲- Axioms

تمرین: با دقت بیشتری به نمودار صفحه‌ی قبل نگاه کنید و با توجه به مطالب مطرح شده، استدلال استنتاجی را توضیح دهید.

۴-۱- مثلث‌های هم‌نهشت^۱

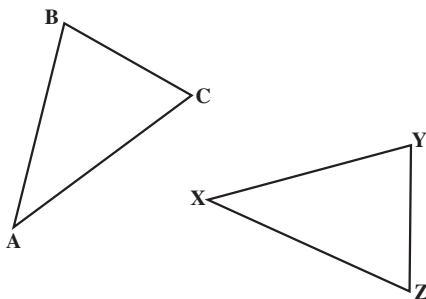
مثلث‌های ABC و XYZ دارای ضلع‌های متناظر مساوی هستند (شکل ۲۰). در نتیجه محیط آن‌ها باهم برابر است. همچنین زاویه‌ها نظیر به نظیر و مساحت‌های آن‌ها نیز باهم برابر هستند.



شکل ۲۰

در واقع هریک از آن‌ها را می‌توانیم کاملاً روی دیگری قرار دهیم. به‌طوری که دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. این ویژگی انطباق کامل شکل‌ها، هم‌نهشتی نامیده می‌شود. برای آنکه نشان دهیم دو مثلث ABC و XYZ هم‌نهشت هستند، می‌نویسیم: $ABC \cong XYZ$ و منظور آن است که این دو مثلث با انطباق رأس A روی رأس X ، رأس B روی رأس Y و رأس C روی رأس Z کاملاً برهم منطبق می‌شوند.

فرض کنید دو مثلث ABC و XYZ هم‌نهشت باشند (شکل ۲۱).

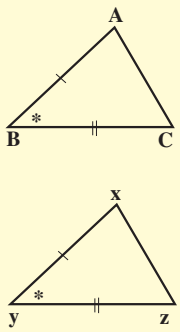


شکل ۲۱

بنابراین می‌توانیم مثلث ABC را طوری روی مثلث XYZ قرار دهیم که A روی X، B روی Y و C روی Z قرار گیرد. در نتیجه،

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{X} & AB &= XY \\ \hat{B} &= \hat{Y} & BC &= YZ \\ \hat{C} &= \hat{Z} & AC &= XZ\end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{ABC} \cong \text{XYZ} \end{array}$$

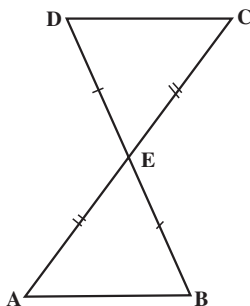
برای نشان دادن هم‌نهشت بودن دو مثلث، همان‌طور که قبلاً دیده‌اید، کافی است نشان دهیم که یکی از سه حالت زیر برقرار است.



حالت (ض‌ض‌ض)

هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال ۱۱: در شکل ۲۲، E وسط AC و BD است. چرا $AB = CD$ ؟ (جواب خود را با ذکر دلیل بنویسید.)



شکل ۲۲

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌های متقابل به رأس، زاویه‌های CED و AEB باهم برابرند. در

مثلث‌های ABE و CED

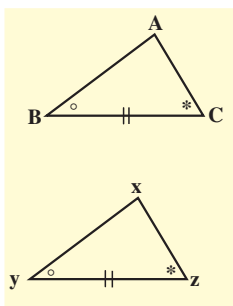
$$AE = CE$$

$$\hat{AEB} = \hat{CED}$$

$$EB = DE$$

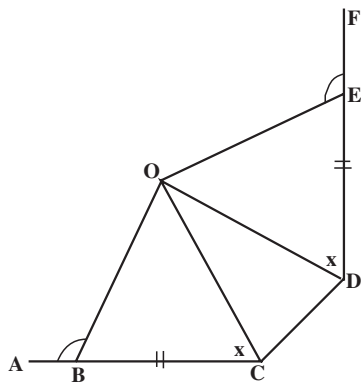
بنابراین، بنا به حالت (ض.ر.ض)، $ABE \cong CDE$.

چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $AB = CD$.



حالت (ض.ر.ض)

هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۲: در شکل ۲۳، $BC = ED$ ،

$\hat{OBA} = \hat{OEF}$ و $\hat{OCB} = \hat{ODE}$. نشان دهید

شکل ۲۳

$$\hat{OBC} = \hat{OED}$$

$$\hat{OBC} = \hat{OED}$$

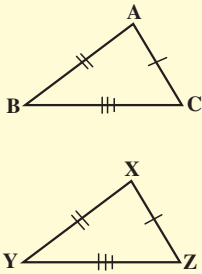
$$BC = ED$$

$$\hat{OCB} = \hat{ODE}$$

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌ی مکمل

در مثلث‌های OBC و OED

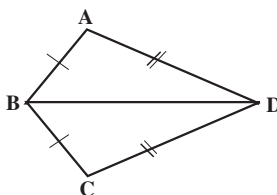
بنابراین، بنابه حالت (زضز)، $OBC \cong OED$ چون مثلث‌ها همنهشت هستند،
 $\hat{BOC} = \hat{EOD}$.



حالت (ضضض)

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.

مثال ۱۳: در شکل ۲۴، $AB = BC$ و $AD = DC$. نشان دهید $\hat{A} = \hat{C}$.



شکل ۲۴

حل: در دو مثلث ABD و BDC داریم

$$AB = BC$$

$$AD = DC$$

$$BD = BD$$

بنابراین، بنا به حالت (ضضض)، $ABD \cong CBD$

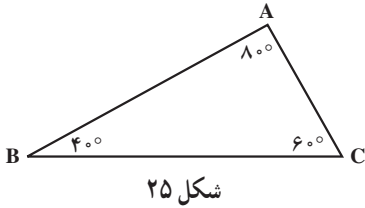
چون مثلث‌های CBD و ABD همنهشت هستند، بنابراین اجزای نظیر آن‌ها قابل انطباق برهم

خواهند بود یعنی $\hat{A} = \hat{C}$.

سه حالت همنهشتی دو مثلث از حقایق پذیرفته شده هستند، با این حال می‌توان دو حالت

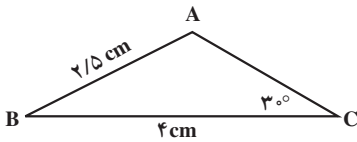
(زضز) و (ضضض) را از حالت اول نتیجه گرفت.

فعالیت ۳-۱



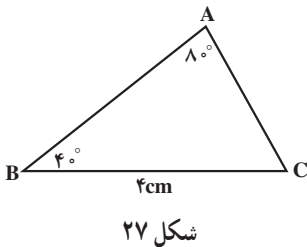
۱. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D} = \hat{A}$ ،
 $\hat{E} = \hat{B}$ و $\hat{F} = \hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۵) هم‌نهشت نباشد.

ب) چند مثلث دیگر با شرایط مثلث DEF می‌توانید رسم کنید؟ چرا؟



پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ۲. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که در آن
 $EF = BC$ ، $DE = AB$ و $\hat{F} = \hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۶) هم‌نهشت نباشد.

ب) آیا تنها مثلی که می‌توانید با شرایط فوق رسم کنید، همان DEF است؟ چرا؟

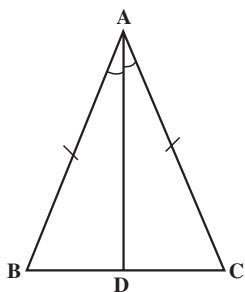


پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ۳. الف) آیا می‌توانید مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D} = \hat{A}$ ، $\hat{E} = \hat{B}$ و $EF = BC$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۷) هم‌نهشت نباشد؟ جواب خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

ب) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵-۱- مثلث متساوی الساقین

در هر مثلث متساوی الساقین دو ضلع برابر وجود دارد که ساق نامیده می‌شوند، به همین دلیل این گونه مثلث‌ها متساوی الساقین نامیده می‌شوند. در شکل ۲۸، مثلث ABC متساوی الساقین است ($AB = AC$). در بخش قبل از طریق استدلال استقرایی مشاهده کردید که اگر در مثلی دو زاویه‌ی



شکل ۲۸

برابر وجود داشته باشد آن مثلث متساوی الساقین است. اکنون نشان می‌دهیم در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های مقابل به اضلاع مساوی، با یکدیگر برابرند ($\hat{B} = \hat{C}$). درستی این نتیجه‌گیری کلی را، با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم. برای این منظور، از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که $\hat{A}$ را نصف کرده و BC را در D قطع کند (AD نیمساز زاویه‌ی A است). در مثلث‌های ABD و ACD .

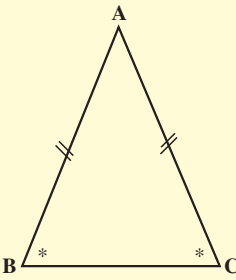
$$AB = AC$$

$$\hat{B}AD = \hat{C}AD$$

$$AD = AD$$

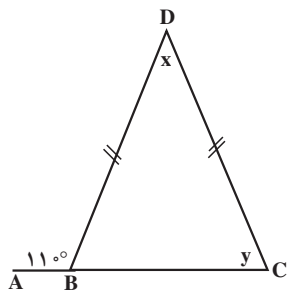
بنابراین، بنابه حالت (ض‌ض‌ض)، $ABD \cong ACD$. چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$.

با توجه به این که درستی مطلب را برای یک مثلث متساوی الساقین دلخواه نشان دادیم، بنابراین نتیجه‌ی به‌دست آمده برای تمام مثلث‌های متساوی الساقین درست است.



قضیه‌ی ۵: مثلث متساوی الساقین

در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.



شکل ۲۹

مثال ۱۴: در شکل ۲۹، مقادیر x و y را پیدا کنید.

حل: چون $\triangle ABC$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

$$\hat{DBC} + 11^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{DBC} = 7^\circ$$

با توجه به قضیه ی مثلث متساوی الساقین، زاویه های DBC و DCB باید باهم برابر باشند.

$$y = 7^\circ$$

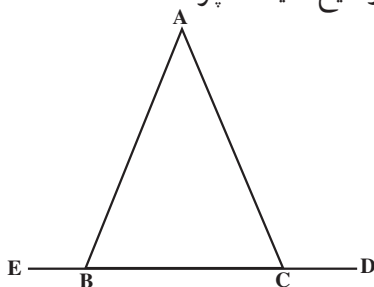
پس:

چون مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است، در نتیجه

$$x + 7^\circ + 7^\circ = 180^\circ$$

$$x = 4^\circ$$

مثال ۱۵: در شکل ۳۰، $AB = AC$. توضیح دهید که چرا $\hat{ABE} = \hat{ACD}$.



شکل ۳۰

$$\hat{ABC} = \hat{ACB}$$

$$\hat{ABE} = \hat{ACD}$$

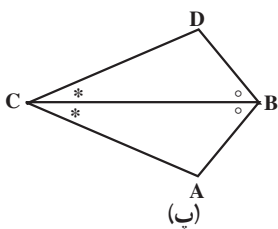
حل: بنا به قضیه ی مثلث متساوی الساقین،

و بنا به قضیه ی دو زاویه ی مکمل،

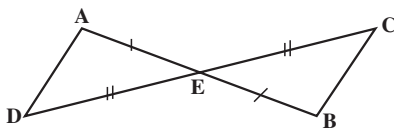
مسائل

۱. ابتدا دلیل همنهشت بودن مثلث ها را بگویید، سپس تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر را

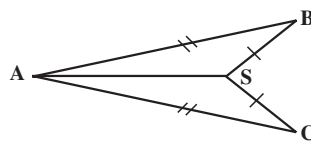
بنویسید.



(ب)



(ب)

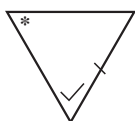


(الف)

۲. مثلث های همنهشت را مشخص کنید و حالت همنهشتی آن ها را بیان نمایید.



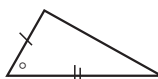
(۱)



(۲)



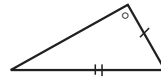
(۳)



(۱)



(۲)



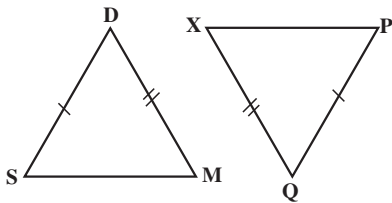
(۳)

(ب)

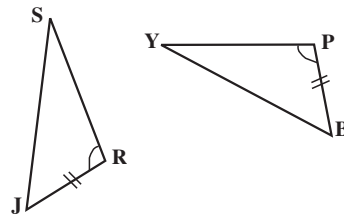
(الف)

۳. با توجه به شکل های زیر، تساوی کدام یک از اجزا، همنهشتی مثلث ها را در (الف) و (ب)

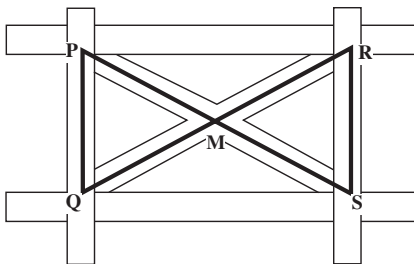
نتیجه می دهد؟



(ب)

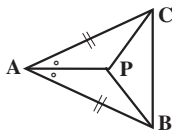


(الف)



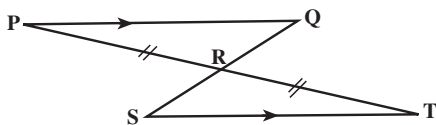
۴. نقطه ی M وسط قطعات متقاطع است.

چرا $MPQ \cong MSR$ ؟



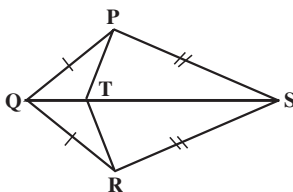
۵. دلیل متساوی الساقین بودن مثلث PBC

را بنویسید.



۶. اگر $PQ \parallel ST$ و R وسط PT باشد، ثابت

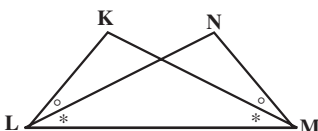
کنید R وسط QS نیز هست.



۷. در چهارضلعی PQRS ، $PQ = RQ$ و

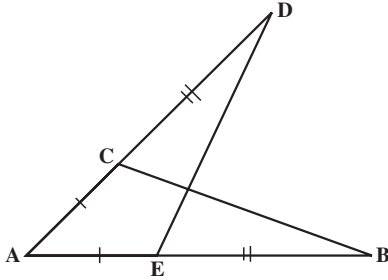
$PS = RS$. اگر نقطه ی دلخواهی روی قطر QS

باشد، ثابت کنید $PT = RT$.

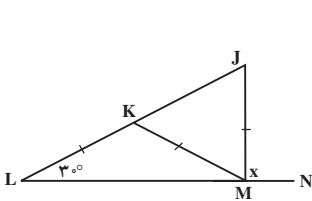


۸. در شکل مقابل ثابت کنید $KL = NM$.

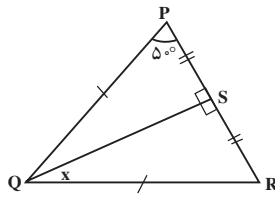
۹. در شکل روبه‌رو ثابت کنید $BC = DE$.



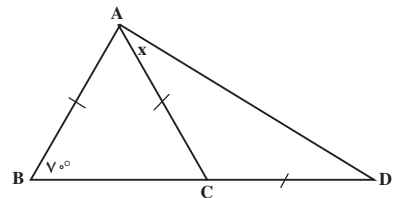
۱۰. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار x را تعیین کنید.



(پ)

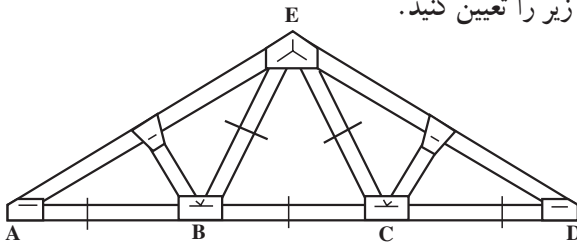


(ب)



(الف)

۱۱. مقدار هریک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید.



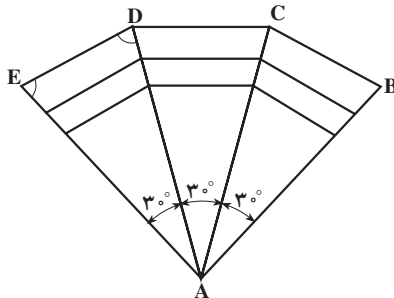
الف) $\hat{BEC}$

ب) $\hat{ABE}$

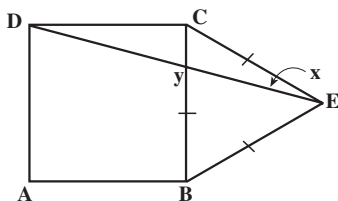
پ) $\hat{EAB}$

۱۲. شکل زیر طرح یک تالار را نشان می‌دهد. اگر هر سه بخش مثلثی شکل همنهشت باشند،

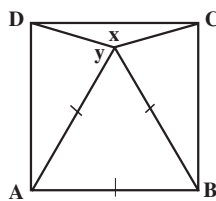
اندازه‌ی $\hat{BCD}$ را تعیین کنید.



۱۳. در هریک از شکل‌های زیر، $ABCD$ یک مربع است. اندازه‌های x و y را به دست آورید.

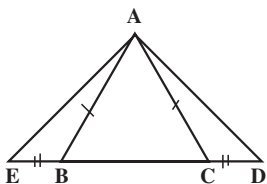


(ب)

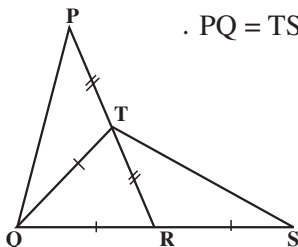


(الف)

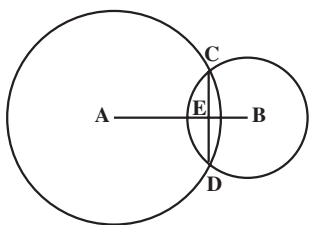
۱۴. با توجه به شکل، ثابت کنید که $AD = AE$.



۱۵. در شکل روبه‌رو، ثابت کنید $\hat{PTQ} = \hat{TRS}$ و $PQ = TS$.



۱۶. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده‌اند.



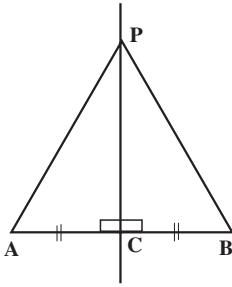
(الف) ثابت کنید $\hat{ACB} = \hat{ADB}$.

(ب) ثابت کنید که AB ، عمود منصف CD است.

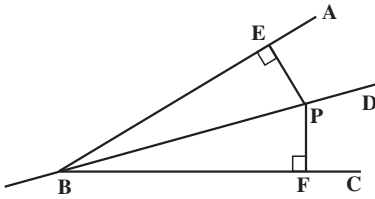
۱۷. در چهارضلعی $PQRS$ ، $PQ = QR$ و قطر QS ، زاویه Q را نصف می‌کند. ثابت کنید

$PS = RS$.

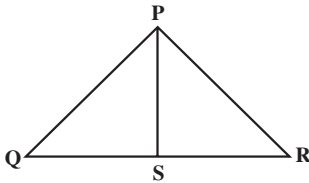
۱۸. اگر XY و WZ قطرهایی از یک دایره باشند، ثابت کنید $XW = YZ$.



۱۹. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمود منصف پاره خط AB از نقاط A و B به یک فاصله است.



۲۰. نشان دهید که هر نقطه مانند P روی نیمساز زاویه ی ABC، از ضلع های AB و BC به یک فاصله است.



۲۱. در مثلث PQR، $PQ = PR$ و PS میانه ی وارد بر ضلع QR است. ثابت کنید:

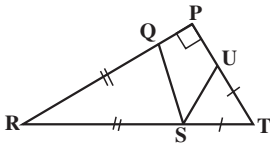
(الف) PS نیمساز زاویه ی QPR است.

(ب) $PS \perp QR$ (PS عمود QR است).

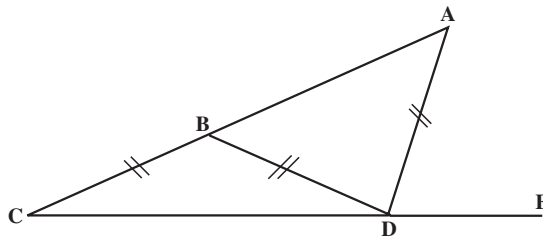
(پ) از دو قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۲. با توجه به شکل، توضیح دهید که چرا

$$\hat{QSU} = 45^\circ$$



۲۳. با توجه به شکل زیر، توضیح دهید چرا $\hat{ADE} = 3\hat{ACE}$



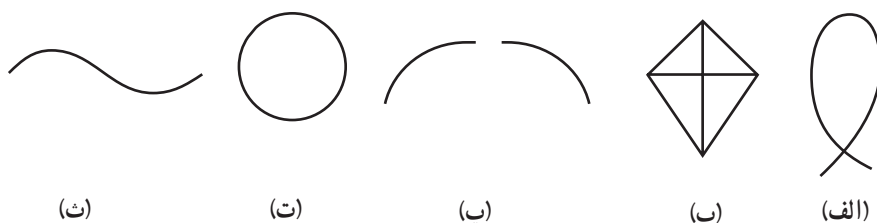
۲۴. از طریق استدلال استنتاجی ثابت کنید مثلی که دو زاویه ی مساوی داشته باشد،

متساوی الساقین است.

۱-۶ از «خم ساده» تا «چندضلعی»

آیا تا به حال با یک قطعه نخ، شکلی روی سطح میز ساخته‌اید؟ این گونه شکل‌ها می‌توانند تصور خم مسطح را برای شما به وجود آورند. به‌طور شهودی، یک خم مسطح مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. پس از این، در این کتاب، همه‌ی خم‌ها را مسطح در نظر می‌گیریم.

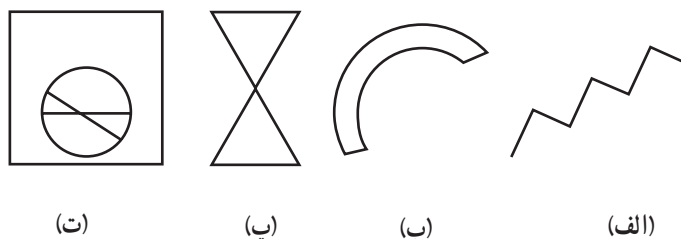
از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که خط‌ها، نیم خط‌ها، پاره خط‌ها و زاویه‌ها همه خم‌های مسطح هستند. در شکل ۳۱، نمونه‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) هر کدام یک خم هستند ولی نمونه (پ) یک خم نیست، زیرا نمی‌توان بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کرد.



شکل ۳۱

یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در شکل ۳۱، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند، ولی (الف) و (ب) خم‌های ساده نیستند. اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.

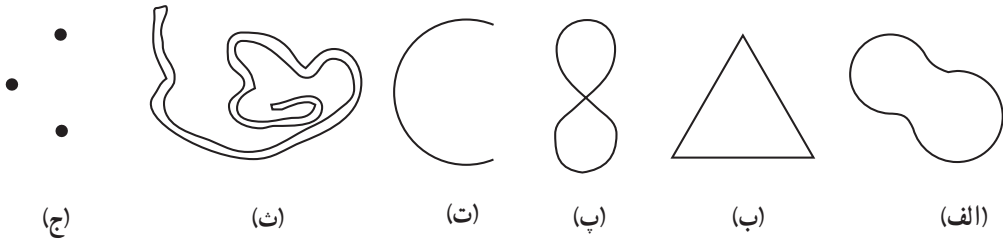
مثال ۱: در شکل ۳۲ مورد (الف)، خم ساده است ولی بسته نیست، مورد (ب) یک خم ساده‌ی بسته است، موردهای (پ) و (ت) خم‌های ساده‌ی بسته نیستند. چرا؟



شکل ۳۲

مثال ۲: کدام یک از شکل‌های زیر نمایش‌دهنده‌ی خم، خم ساده، خم بسته یا خم ساده‌ی

بسته هستند؟



شکل ۳۳

حل:

— شکل‌های (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) خم هستند.

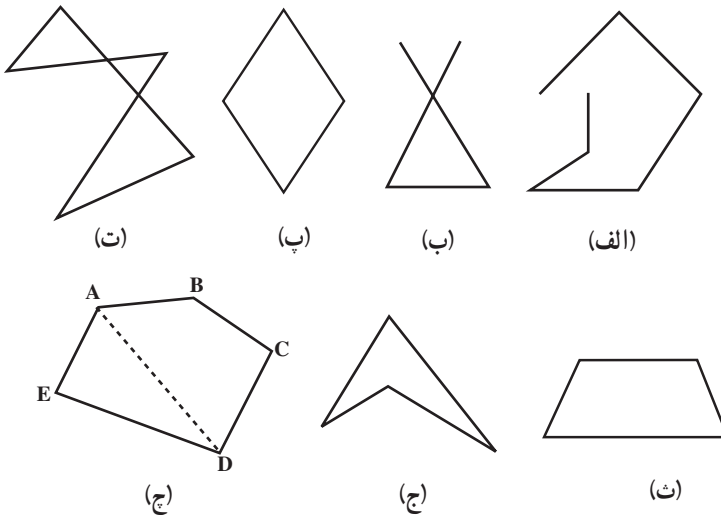
— شکل‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند.

— شکل‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ث) خم‌های بسته هستند.

— شکل‌های (الف)، (ب) و (ث) خم‌های ساده‌ی بسته هستند.

تمرین: با توجه به تعریف‌های خم، خم ساده، خم بسته و خم ساده‌ی بسته، حروف الفبای

فارسی را دسته‌بندی کنید.



شکل ۳۴

همه‌ی خم‌های ساده‌ی بسته دارای یک ویژگی مشترک هستند. آیا می‌توانید آن را کشف کنید؟

توجه کنید که این ویژگی هیچ ارتباطی به اندازه، شکل و همنهستی آنها ندارد. در واقع این ویژگی آن قدر بدیهی به نظر می‌رسد که ممکن است آن را نادیده گرفته باشید.

هر خم ساده‌ی بسته دارای درون و بیرون است. هر خم ساده‌ی بسته، مجموعه نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کند، این زیرمجموعه‌ها شامل نقطه‌های درون، بیرون و روی خم هستند.^۱

قضیه خم جُردن

هر خم ساده‌ی بسته‌ی C ، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

چرا نمونه‌های (الف)، (ب)، و (ت) خم ساده‌ی بسته نیستند؟ توضیح دهید. نمونه‌های (پ)، (ث)، (ج) و (ج)، خم‌های ساده‌ی بسته‌ای هستند که چندضلعی نامیده می‌شوند.

چندضلعی یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد به طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

در شکل ۳۴ (ج)، پاره‌خط‌های AB ، BC ، CD ، DE و EA ضلع‌های چندضلعی $ABCDE$ و نقطه‌های A ، B ، C ، D و E رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. رأس‌های مجاور، نقطه‌های انتهایی یک ضلع هستند و قطرهای یک چندضلعی پاره‌خط‌هایی هستند که رأس‌های غیرمجاور را به هم وصل می‌کنند، مانند AD در شکل ۳۴ (ج).

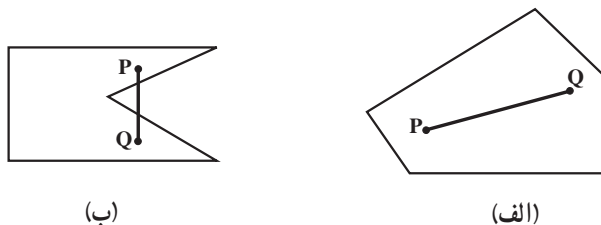
چندضلعی‌ها براساس تعداد ضلع‌هایشان نامگذاری می‌شوند. به عنوان مثال، یک چندضلعی با سه ضلع، سه ضلعی یا مثلث، با چهار ضلع، چهارضلعی و با پنج ضلع، پنج ضلعی خوانده می‌شود.

۱- اگر چه این ویژگی واضح به نظر می‌رسد، ولی قضیه‌ی خم جردن دارای اثبات بسیار مشکلی است که در سطح ریاضی پیشرفته مطرح می‌شود زیرا به ابزار قوی‌تری از جمله توپولوژی جبری نیازمند است.

اجتماع نقاط یک خم ساده‌ی بسته با نقاط درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه در دو دسته‌ی محدب و غیرمحدب طبقه‌بندی می‌شوند.

یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

در غیراین‌صورت اگر حداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به‌طوری که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل ۳۵، ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (الف) محدب و ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (ب) غیرمحدب است.

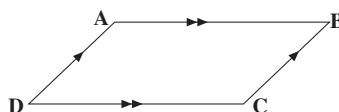


شکل ۳۵

دایره نیز نمونه‌ای از یک خم ساده‌ی بسته است که درون آن یک ناحیه‌ی محدب می‌باشد.

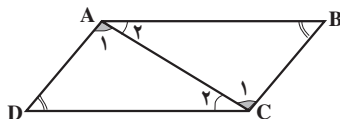
۷-۱- متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که ضلع‌های آن دوه‌دو باهم موازی هستند. از موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو، مساوی بودن آن‌ها نیز نتیجه می‌شود. برای نشان دادن این خاصیت، از استدلال استنتاجی کمک می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

قطر AC، متوازی الاضلاع را به دو مثلث ABC و ADC تقسیم می کند (شکل ۳۷).



شکل ۳۷

طبق قضیه‌ی خطوط موازی، در این دو مثلث داریم

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1, \quad \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

ضلع AC نیز در هر دو مثلث مشترک است. پس دو مثلث ABC و ADC به حالت (ضزز) هم‌نهشت هستند. در نتیجه ضلع‌های نظیر برابر هستند. یعنی

$$AD = BC, \quad AB = DC$$

همچنین در دو مثلث ABC و ADC زاویه‌های نظیر نیز برابر خواهند بود.

$$\hat{B} = \hat{D}$$

و چون $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ در نتیجه :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$$

$$\hat{A} = \hat{C}$$

یعنی

قضیه‌ی ۶:

در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های موازی باهم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو نیز دوجه‌دو باهم مساوی هستند. یعنی در متوازی الاضلاع ABCD،

$$AD = BC, \quad AB = DC$$

$$\hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{B} = \hat{D}$$

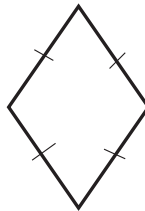


یادآوری: در هر متوازی الاضلاع، پاره خطی که از یک رأس بر ضلع روبه روی آن عمود می شود ارتفاع و ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده است، قاعده ی نظیر آن ارتفاع نامیده می شود.



شکل ۳۸

ارتفاع را با h و قاعده را با b نمایش می دهند.
یادآوری: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع مساوی داشته باشند لوزی خوانده می شود.



شکل ۳۹

تمرین ۱: به وسیله ی استدلال استنتاجی، یعنی با تکیه بر حقایقی که درستی آن ها را پذیرفته بودیم، مساوی بودن ضلع های روبه روی هم در هر متوازی الاضلاع را نشان دادیم. آن حقایق کدام ها هستند؟

تمرین ۲: با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی الاضلاع، قطر ها یکدیگر را نصف می کنند.

تمرین ۳: نشان دهید که در هر مستطیل، قطر ها با هم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می کنند.

تمرین ۴: نشان دهید که در هر لوزی، قطر ها بر یکدیگر عمودند و یکدیگر را نصف می کنند.

تحقیق

این مثلث متساوی الاضلاع به سه شکل همنهشت تقسیم شده است. نشان دهید که یک مثلث متساوی الاضلاع چگونه به

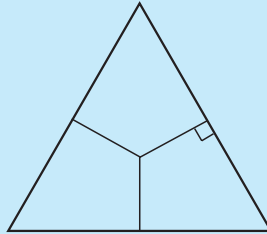
(ب) ۳ مثلث همنهشت

(الف) ۲ مثلث همنهشت

(ت) ۶ مثلث همنهشت

(پ) ۴ مثلث همنهشت

تقسیم می شود.



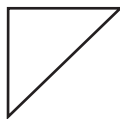
مسائل

۱. خم های مسطح را در شکل های زیر مشخص کنید. کدام یک از شکل ها خم ساده هستند؟

کدام یک از خم های ساده، بسته هستند؟



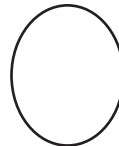
(ث)



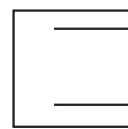
(ت)



(پ)



(ب)



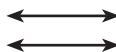
(الف)



(د)



(خ)



(ح)



(ج)



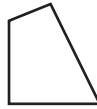
(ج)

۲. کدام یک از شکل های زیر چندضلعی هستند؟ چندضلعی ها را از نظر محدب بودن دسته بندی

کنید.



(پ)



(ب)



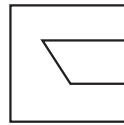
(الف)



(ج)



(ث)



(ت)

۳. الفبای انگلیسی را با حروف بزرگ نوشته، سپس آن ها را با توجه به تعریف های خم ساده،

خم بسته، خم ساده ی بسته و چندضلعی دسته بندی کنید.

۴. با استفاده از چندپاره خط خمی رسم کنید که :

(الف) ساده باشد اما بسته نباشد. (ب) ساده و بسته باشد.

۵. هریک از چندضلعی های زیر چند قطر دارند؟

(الف) مثلث (ب) شش ضلعی (پ) هشت ضلعی

۶. ثابت کنید :

(الف) یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند، متوازی الاضلاع است.

(ب) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی

متوازی الاضلاع است.

(پ) اگر در یک چهارضلعی زاویه های مقابل دوه دو متساوی باشند، چهارضلعی

متوازی الاضلاع است.

(ت) اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی

متوازی الاضلاع است.

(ث) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه رو دوه دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع

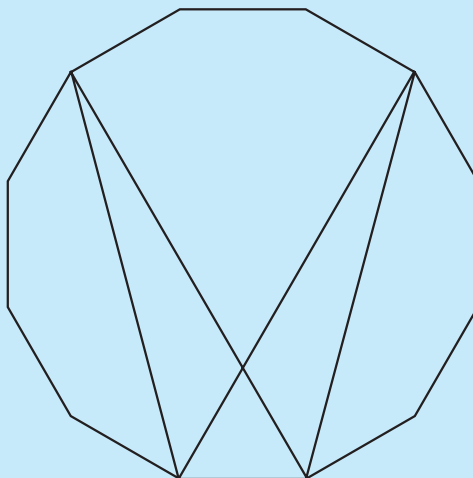
است.

(ج) هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن

چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

مجله‌ی ریاضی

ابوالوفابوزجانی ریاضیدان نامی ایرانی کتابی درباره‌ی معماهای ریاضی دارد. معماهای این کتاب به صورت شکل‌هایی هستند که به قسمت‌های مختلف تقسیم شده‌اند و باید شکل‌ها بریده شوند و طوری کنار هم قرار بگیرند تا شکل جدیدی حاصل شود و معما حل گردد. معمای زیر یکی از کارهای ابوالوفابوزجانی است. به معمای زیر نگاه کنید. این دوازده ضلعی منتظم به شش قسمت تقسیم شده است. آن قسمت‌ها را ببرید^۱ و طوری آن‌ها را کنار هم بگذارید تا یک مربع تشکیل شود. دقت کنید که یکی از قسمت‌ها یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



قطعه‌های مربع تشکیل شده را به هم بچسبانید و ثابت کنید که شکل تشکیل شده در واقع یک مربع است.

۱- می‌توانید شکل را از روی کتاب به دفتر خود برگردان کنید.

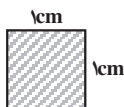
مساحت و قضیه ی فیثاغورس



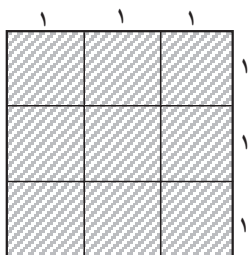
کشتزارهای شاهرود

۲-۱- مساحت

با انتخاب هر واحدی برای اندازه گیری طول یک پاره خط، واحدی نیز برای اندازه گیری مساحت به دست می آوریم که به کمک آن می توانیم مقدار سطح محدود شده در ناحیه ای از صفحه را اندازه بگیریم. برای مثال، اگر سانتی متر را برای اندازه گیری طول انتخاب کنیم واحد نظیر آن برای



شکل ۱: $1 \text{ cm}^2 = \text{مساحت}$

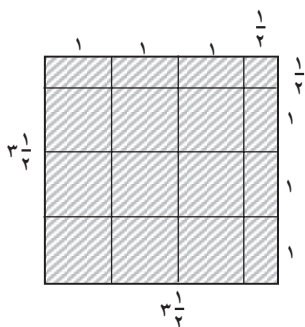


شکل ۲

اندازه‌گیری مساحت، سانتی متر مربع است که عبارت است از مساحت ناحیه‌ی محدود به مربعی به ضلع یک سانتی متر (شکل ۱).

مربعی که طول ضلع آن یک واحد باشد (با هر واحد اندازه‌گیری طول)، مربع واحد نامیده می‌شود. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌های مختلف در صفحه باید تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع‌های واحد که ناحیه را می‌پوشانند، پیدا کنیم. برای مثال، مساحت مربعی به ضلع ۳ سانتی متر، ۹ سانتی متر مربع است (شکل ۲)، زیرا با ۹ مربع واحد می‌توان سطح آن را پوشاند.

فعالیت ۲-۱



شکل ۳

۱. مربعی به ضلع $3\frac{1}{4}$ سانتی متر را با ۹ مربع واحد، ۶ تا نیمه مربع و بالاخره مربع کوچکی به ضلع $\frac{1}{4}$ سانتی متر که مساحت آن یک چهارم مساحت مربع واحد است پوشانده‌ایم (شکل ۳).

بنابراین مساحت این مربع برابر است با

$$9 + (6 \times \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = 9 + 3 + \frac{1}{4} = 12\frac{1}{4} \text{ cm}^2$$

۲. مربعی به ضلع $4\frac{1}{4}$ سانتی متر رسم کنید. مساحت این مربع را با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است به دست آورید، سپس حاصل ضرب $4\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{4}$ را پیدا و با آن مقایسه کنید.

۳. مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌های آن ۳ سانتی متر و ۵ سانتی متر باشد. مساحت این مستطیل را با شمارش تعداد مربع‌های واحد که برای پوشاندن آن لازم است، تعیین کنید و با حاصل ضرب 3×5 مقایسه کنید.

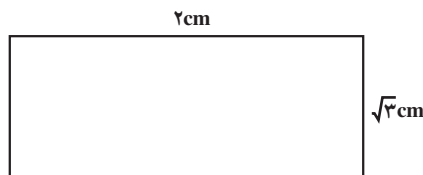
۴. مستطیلی به ضلع‌های $6\frac{1}{4}$ سانتی متر و ۵ سانتی متر رسم کنید و با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است، مساحت آن را به دست آورید. سپس نتیجه را با حاصل ضرب $6\frac{1}{4} \times 5$ مقایسه کنید.

نتایجی را که از فعالیت ۲-۱ به دست آورده‌ایم به صورت کلی خلاصه می‌کنیم:

مساحت مستطیلی به طول ضلع‌های a و b برابر است با:

$$a.b$$

توجه: اندازه‌ی ضلع‌های مربع و مستطیل می‌توانند اعداد گنگ مثبت هم باشند.



شکل ۴

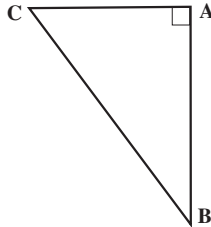
مثال ۱: در شکل ۴، اندازه ضلع‌های مستطیل ۲ و $\sqrt{3}$ سانتی متر هستند.

بنابراین:

$$\text{مساحت مستطیل} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

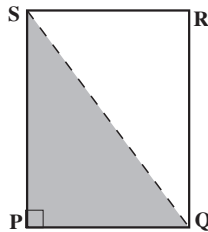
فعالیت ۲-۲

۱. مثلث ABC را که در رأس A قائمه است رسم کنید (شکل ۵).



شکل ۵

۲. مستطیل $PQRS$ را طوری رسم کنید که طول و عرض آن به ترتیب برابر با AB و AC باشند. آنگاه قطر QS را رسم کنید (شکل ۶).



شکل ۶

۳. آیا مثلث‌های ABC ، PQS و RSQ همنهشت هستند؟ جواب خود را با دلیل بیان کنید.

۴. از قسمت ۳ چه نتیجه‌ای در مورد مساحت این سه مثلث به دست می‌آورید؟

۵. طول مستطیل را ۵ و عرض آن را ۳ واحد طول بگیرید. مساحت این مستطیل چقدر

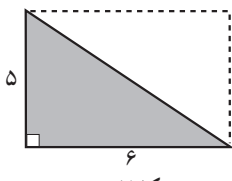
است؟

۶. با اندازه‌های فوق، مساحت مثلث‌های PQS ، RSQ و ABC را به دست آورید.

۷. چه رابطه‌ای بین مساحت مثلث ABC و مساحت مستطیل $PQRS$ وجود دارد؟

۸. اگر طول ضلع‌های زاویه‌های قائمه در مثلث شکل ۵، b و c واحد باشند، مساحت آن

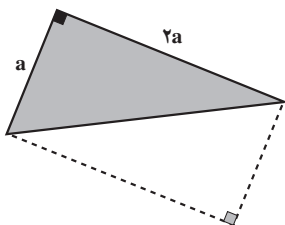
چگونه به دست می‌آید؟ توضیح دهید.



شکل ۷

مثال ۲: با توجه به نتیجه‌ی فعالیت ۲-۲، مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۷ برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15 \text{ cm}^2$$



شکل ۸

مثال ۳: مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۸ برابر است با:

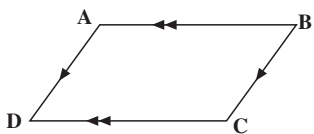
$$\frac{1}{2} \times 2a \times a = a^2 \text{ واحد سطح}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه، یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، آنگاه:

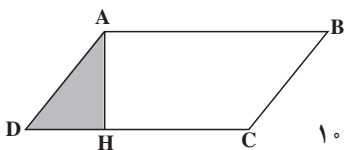
$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{1}{2} ab$$

فعالیت ۲-۳



شکل ۹

۱. روی یک قطعه مقوا، متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم کنید.



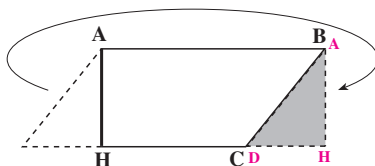
شکل ۱۰

۲. ارتفاع AH وارد بر ضلع DC را رسم کنید تا مثلث AHD تشکیل گردد.

۱- بهتر است متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده متفاوت باشند.

۲- تکیه‌ی این فعالیت بر چگونگی رسم متوازی‌الاضلاع نیست.

۳. مثلث AHD را بریده و آن را طوری به سمت راست منتقل کنید که ضلع AD روی ضلع BC قرار بگیرد.



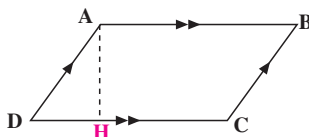
شکل ۱۱

۴. به نظر شما چهارضلعی ABHH چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
۵. با توجه به مساحت ABHH، روشی برای پیدا کردن مساحت متوازی الاضلاع ABCD پیدا کنید.

حال به کمک استدلال استنتاجی، رابطه‌ای را که در فعالیت قبل برای مساحت متوازی الاضلاع به دست آوردید، نشان می‌دهیم.

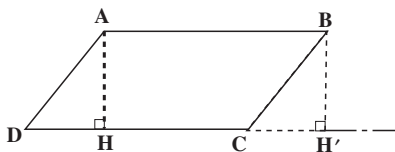
فعالیت ۲-۴

۱. متوازی الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم و ارتفاع وارد بر ضلع DC را رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).

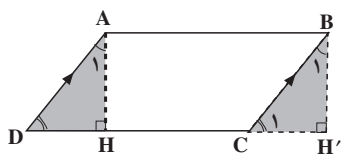


شکل ۱۲

۲- ضلع DC را امتداد می‌دهیم و از رأس B خطی بر امتداد آن عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی H' قطع کنند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۴

۳. نشان دهید چهارضلعی $ABH'A'$ مستطیل است.

۴. در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، ضلع‌های AD

و BC موازی و مساوی هستند و به کمک قضیه‌ی

خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت (چرا؟).

$$\hat{D} = \hat{C}_1$$

در نتیجه متمم‌های آن‌ها یعنی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ نیز برابرند.

با ادامه‌ی این فعالیت می‌توان نتایج زیر را به دست آورد :

الف) دو مثلث AHD و $BH'C$ به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند، پس :

$$\text{مساحت مثلث } BH'C = \text{مساحت مثلث } AHD$$

ب) مثلث AHD و دوزنقه‌ی $ABCH$ ، متوازی الاضلاع $ABCD$ را به دو قسمت مجزا^۱ تقسیم

کرده‌اند، پس :

$$\text{مساحت دوزنقه‌ی } ABCH + \text{مساحت مثلث } AHD = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

مقدار مساوی مساحت AHD را از (الف) جایگزین می‌کنیم.

$$\text{مساحت دوزنقه‌ی } ABCH + \text{مساحت مثلث } BH'C = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

پ) با دقت در شکل ۱۴، دیده می‌شود که دوزنقه‌ی $ABCH$ و مثلث $BH'C$ ، مستطیل

$ABH'A'$ را می‌سازند، در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } ABH'A' = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

یا

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD = AB \times AH$$

چون $AB = DC$ ، پس

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD = DC \times AH$$

مساحت متوازی الاضلاع

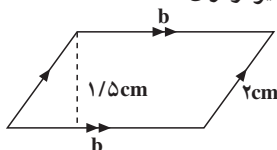
مساحت هر متوازی الاضلاع برابر با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = b \times h \text{ است.}$$

۱- منظور از دو شکل مجزا آن است که مساحت اشتراک آن‌ها صفر باشد.

مثال ۴: محیط متوازی الاضلاعی ۱۶ سانتی متر، یک ضلع آن ۲ سانتی متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر ۱/۵ سانتی متر است. مساحت متوازی الاضلاع را حساب کنید.

حل: چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌ها دوجه دو با هم مساوی هستند، پس محیط آن برابر است با دو برابر مجموع دو ضلع غیرموازی،



شکل ۱۵

یعنی :

$$۱۶ = ۲(۲ + b) = \text{محیط متوازی الاضلاع}$$

$$۲ + b = ۸$$

$$b = ۸ - ۲$$

پس $b = ۶$. در نتیجه :

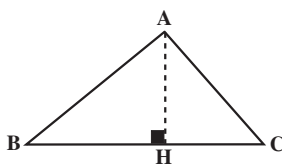
$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده}$$

$$= ۶ \times ۱/۵$$

$$= ۹ \text{ cm}^2$$

می‌توان مساحت مثلث را با استفاده از مساحت متوازی الاضلاع، به‌دست آورد.

مثلث ABC (شکل ۱۶) را در نظر بگیرید.

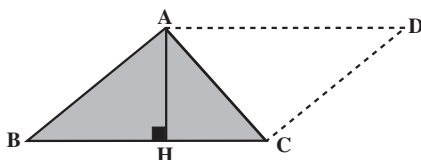


شکل ۱۶

پاره‌خط AH که از رأس A بر ضلع BC عمود شده است، ارتفاع مثلث و ضلع BC قاعده‌ی نظیر این ارتفاع نامیده می‌شود. هریک از ضلع‌های مثلث را می‌توان به عنوان قاعده در نظر گرفت و ارتفاع نظیر آن را رسم نمود.

تمرین: مثلی با یک زاویه‌ی قائمه و مثلث دیگری با یک زاویه‌ی منفرجه رسم کرده، سپس سه ارتفاع هریک از آن‌ها را رسم کنید.

در مثلث ABC (شکل ۱۷) از رأس A پاره خط AD را موازی BC رسم می‌کنیم طوری که $AD = BC$. آنگاه نقطه‌ی D را به C وصل می‌کنیم. به این ترتیب متوازی الاضلاع ABCD با ارتفاع AH و قاعده‌ی BC به‌دست می‌آید.



شکل ۱۷

$$ABCD \text{ مساحت متوازی الاضلاع } = BC \times AH \quad (۱)$$

از طرف دیگر، دو مثلث ABC و ACD که متوازی الاضلاع ABCD را تشکیل می‌دهند، به‌حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، پس مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است. در نتیجه

$$ABCD \text{ مساحت متوازی الاضلاع } = \text{مساحت مثلث } ABC + \text{مساحت مثلث } ADC$$

$$ABCD \text{ مساحت متوازی الاضلاع } = ۲(\text{مساحت مثلث } ABC) \quad (۲)$$

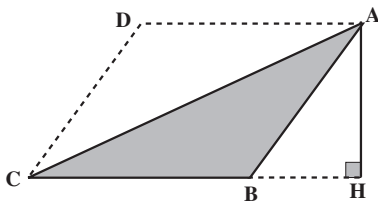
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$BC \times AH = ۲(\text{مساحت مثلث } ABC)$$

یا

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}(BC \times AH)$$

در شکل ۱۷، ارتفاع نظیر BC داخل مثلث قرار گرفته بود. اگر این ارتفاع مانند شکل ۱۸ در خارج مثلث یعنی بر امتداد قاعده‌ی BC عمود شود، همان استدلال بالا را می‌توان برای به‌دست آوردن مساحت آن به‌کار برد.



شکل ۱۸

برای این کار، از رأس A، پاره خط AD را مساوی و موازی با BC رسم می کنیم. سپس نقطه ی D را به C متصل می کنیم. مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر است با

$$AH \times BC$$

از طرفی، دو مثلث ABC و ACD به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. پس مساحت های آنها با هم برابر است :

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث ADC} + \text{مساحت مثلث ABC} &= \text{مساحت متوازی الاضلاع ABCD} \\ &= 2(\text{مساحت مثلث ABC}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2}(AH \times BC)$$

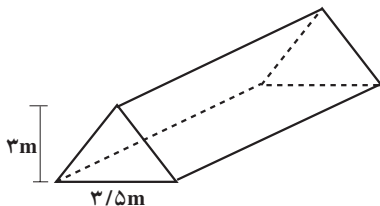
اگر مثلث ABC قائم الزاویه باشد، متوازی الاضلاعی که همانند بالا روی آن ساخته می شود در واقع یک مستطیل است که ارتفاع و قاعده ی آن همان دو ضلع زاویه ی قائمه در مثلث هستند، پس به طور کلی

مساحت مثلث

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده ی نظیر آن، یعنی اگر اندازه ی ارتفاع h و اندازه قاعده ی نظیر آن b باشد

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}bh$$

مثال ۵: به شکل ۱۹ نگاه کنید. این نمایی از یک چادر صحرایی است. می بینید که قسمت جلوی چادر به شکل مثلثی به ارتفاع ۳ متر و قاعده ی ۳/۵ متر است. برای پوشاندن جلوی این چادر چند متر مربع پارچه لازم است؟



شکل ۱۹

حل: چون مساحت مثلث جلوی چادر برابر است با

$$\frac{1}{3} \times 3 \times (3/5) = \frac{10/5}{3} = 5/25 \text{ m}^2$$

پس ۵/۲۵ مترمربع پارچه لازم است.

مثال ۶: اگر مساحت مثلثی ۵ سانتی مترمربع و قاعده‌ی آن ۳ سانتی متر باشد، ارتفاع آن چقدر

است؟

حل: چون

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} &= \frac{1}{3} \times \text{مساحت مثلث} \\ &= \frac{1}{3} bh \end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق با داشتن مقدارهای معلوم مساحت و قاعده، مقدار ارتفاع را که مجهول

است، پیدا می‌کنیم:

$$5 = \frac{1}{3} \times 3 \times h = \frac{3h}{3}$$

درنتیجه:

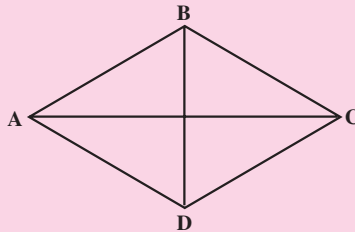
$$h = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

توجه: با استفاده از مساحت مثلث، می‌توان مساحت لوزی را به‌دست آورد:

مساحت لوزی

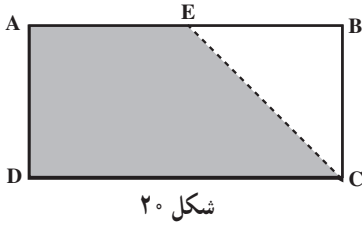
مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

$$\text{مساحت لوزی } ABCD = \frac{1}{2} (AC \times BD)$$

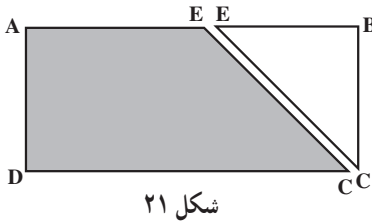


تمرین: نشان دهید مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن.

فعالیت ۲-۵

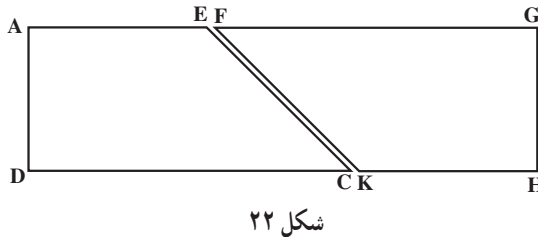


۱. مقوای مستطیل شکل ABCD را تهیه کنید.
نقطه‌ی E را روی ضلع AB انتخاب و از آن به رأس C وصل کنید (شکل ۲۰).



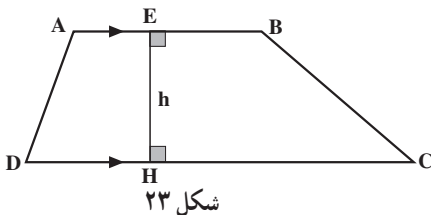
۲. مقوا را در امتداد پاره خط CE ببرید. دو شکل به دست می‌آید. یکی مثلث EBC و دیگری چهارضلعی AECD که یک دوزنقه است (شکل ۲۱).

۳. با یک تکه مقوا، دوزنقه‌ی FGHK را همنهشت با AECD ببرید. سپس دو دوزنقه را مانند شکل ۲۲ کنار هم بگذارید تا مستطیل AGHD تشکیل شود.



۴. مساحت مستطیل AGHD را به دست آورید.
۵. به کمک نتیجه‌ی قسمت ۴، مساحت دوزنقه AECD را بیابید.

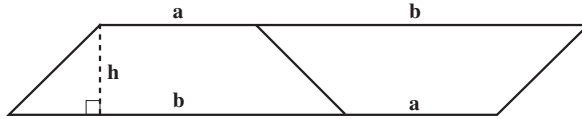
دوزنقه یک چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.



دو ضلع موازی در یک دوزنقه، قاعده‌های دوزنقه و پاره خطی که بر هر دو قاعده عمود است، ارتفاع دوزنقه نامیده می‌شود (شکل ۲۳).

فعالیت ۲-۶

- یک تکه مقوا به شکل دوزنقه تهیه کنید. طول قاعده‌ی کوچک را a ، طول قاعده‌ی بزرگ را b و طول ارتفاع را h بنامید (شکل ۲۴).

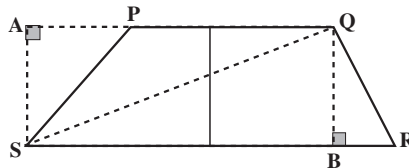


شکل ۲۴

- دوزنقه‌ی دیگری همنهشت با دوزنقه‌ی بریده شده تهیه کنید و مانند شکل آن‌ها را کنار هم بگذارید. نشان دهید شکل حاصل متوازی الاضلاع است.
- مساحت متوازی الاضلاع به دست آمده را پیدا کنید.
- مساحت دوزنقه را از روی مساحت متوازی الاضلاع حساب کنید.

فعالیت ۲-۷

- در دوزنقه‌ی شکل ۲۵، قاعده‌ی PQ را امتداد دهید. سپس از رأس S بر آن عمودی رسم کنید تا آن را در نقطه‌ی A قطع کند. پاره خط SA ارتفاع نظیر قاعده‌ی PQ است. سپس ارتفاع QB را رسم کرده و دو رأس مقابل Q و S را به هم وصل کنید تا قطر QS به دست آید.



شکل ۲۵

- طول قاعده‌ی کوچک را a ، طول قاعده‌ی بزرگ را b و ارتفاع $QB = SA$ را h بگیرید؛
- با توجه به اینکه طول QB برابر h و طول SR برابر b است، مساحت مثلث QRS را پیدا کنید؛

کنید؛

۴. با توجه به اینکه طول SA، برابر h و طول PQ برابر a است، مساحت مثلث PQS را به دست آورید؛

۵. مساحت دوزنقه PQRS را بر حسب a، b و h حساب کنید.

مساحت دوزنقه

مساحت دوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع، یعنی مساحت دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با

$$\frac{1}{2}(a+b)h$$

مثال ۷: مساحت دوزنقه‌ای با قاعده‌های ۸cm و ۱۰cm و ارتفاع ۶cm برابر است با

$$\frac{1}{2}(8+10) \times 6 = 54 \text{ cm}^2$$

مجله‌ی ریاضی

برای به دست آوردن مساحت، از چهار اصل مساحت استفاده کردیم:

اصل ۱: مساحت هر شکلی در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

اصل ۲: اگر یک شکل از بخش‌های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر با مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.

اصل ۳: مساحت شکل‌های همنهشت مساوی هستند.

اصل ۴: مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است.

مسائل^۱

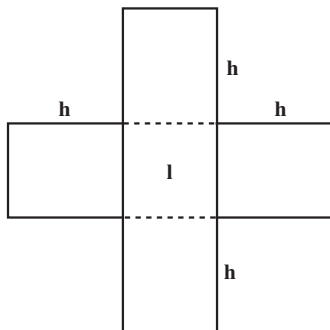
۱. ارتفاع مثلثی h و قاعده‌ی آن ۲h است. مساحت مثلث را بر حسب h پیدا کنید.

۲. ارتفاع مثلثی نصف قاعده‌ی آن است. اگر مساحت مثلث ۳۶ مترمربع باشد، طول قاعده‌ی

آن را پیدا کنید.

۱- اگر واحد اندازه‌گیری ذکر نشده باشد، شما می‌توانید واحد دلخواه اختیار کنید.

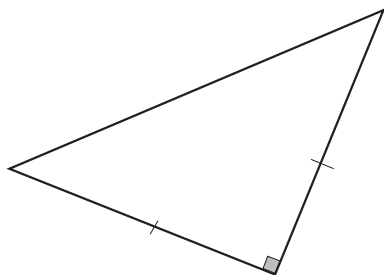
۳. مساحت مستطیلی ۱۴۴° سانتی متر مربع و طول آن ۵ برابر عرض آن است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.



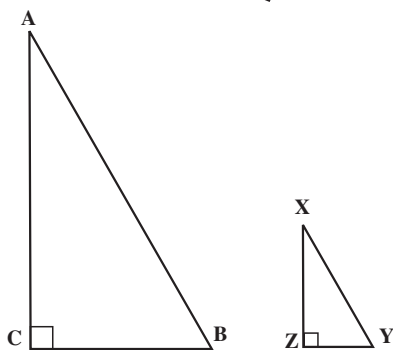
۴. اگر مقوای نشان داده شده در شکل روبه‌رو را از محل‌های نقطه‌چین تا کنیم، یک جعبه‌ی دربارز درست می‌شود.

الف) اگر $h = 5\text{cm}$ و $l = 4\text{cm}$ برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (برحسب سانتی مترمربع) لازم است؟
ب) مساحت مقوا را در حالت کلی بر حسب h و l پیدا کنید.

۵. اگر ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ باشد، قاعده‌ی آن را حساب کنید.



۶. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی 4° است. اندازه‌ی هر کدام از ساق‌ها را پیدا کنید (شکل روبه‌رو).



۷. در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث ABC دو برابر اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث XYZ است:

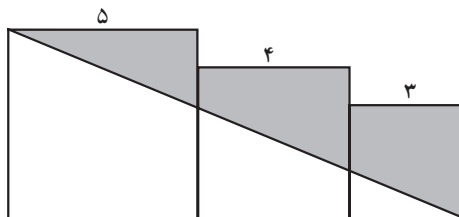
نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث XYZ چقدر است؟

(راهنمایی: اگر $XZ = a$ و $YZ = b$ ، آنگاه اندازه‌های AC و BC، به ترتیب $2a$ و $2b$

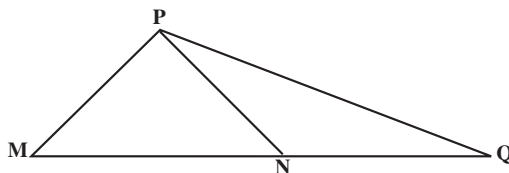
خواهد بود.)

۸. مسأله‌ی قبل را برای حالتی که اندازه‌ی ضلع‌های مثلث ABC ، n برابر طول اضلاع مثلث XYZ باشد حل کنید (n عدد طبیعی است).

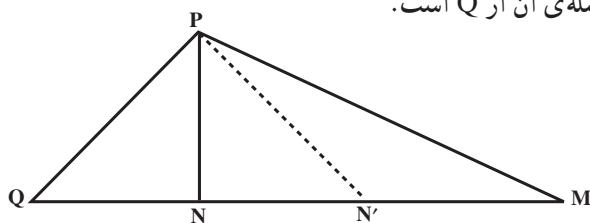
۹. در شکل زیر، سه مربع به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده چقدر است؟



۱۰. در مثلث PQM ، نقطه‌ی N وسط ضلع QM است. نشان دهید مساحت‌های دو مثلث PMN و PNQ برابرند.



۱۱. در شکل زیر، نقطه‌ی N روی پاره خط QM چنان انتخاب شده است که فاصله‌ی آن از M دو برابر فاصله‌ی آن از Q است.

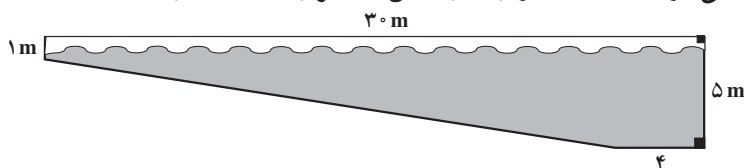


الف) ثابت کنید مساحت PNM دو برابر مساحت PQN است.

ب) اگر N' وسط NM باشد، مساحت‌های $PN'M$ و PQN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) چه رابطه‌ای بین مساحت PNN' و مساحت PQM وجود دارد؟

۱۲. طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به دست آورید.



۱۳. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۱۴. می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشی‌های مربع شکلی به ضلع $\frac{5}{8}$ متر پیوشانیم. اگر قیمت هر کاشی 35° تومان باشد، هزینه‌ی این کار چقدر خواهد بود؟

۱۵. اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نشان دهید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها است.

۱۶. اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها است.

۱۷. نتیجه‌گیری‌های الف، ب و پ بعد از فعالیت ۲-۴ بر پایه کدام یک از اصل‌های بیان شده در مجله ریاضی صفحه ۴۵ است.

۲-۲- قضیه‌ی فیثاغورس

در اکثر مناطق کشورمان آجر، بلوک‌های سیمانی، سنگ و سیمان و گاهی خشت از جمله مصالح اصلی خانه‌سازی و ساختمان‌ها هستند. یکی از موارد مهم در ساختن خانه‌ها و ساختمان‌ها، قائمه بودن زاویه‌ی بین دیوارها و یا گوشه‌های اتاق‌ها و اسکلت‌بندی ساختمان است، همانگونه که در ضرب‌المثل‌ها آمده است:

خشت اول چون نهد معمار کج تا ثریا می‌رود دیوار کج
معمولاً بناهای ماهر و با تجربه برای قائمه شدن زاویه بین دیوارها که به

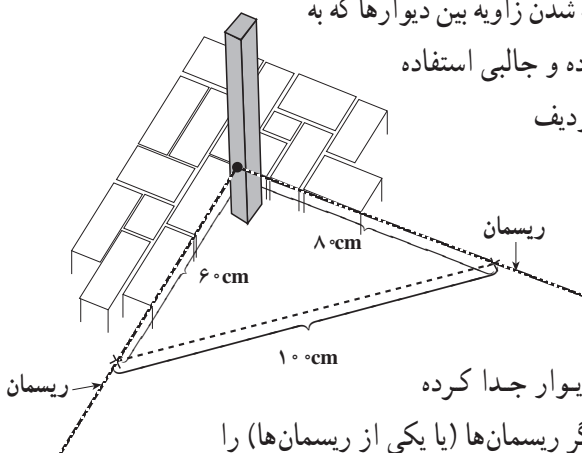
آن «گونیا کردن» می‌گویند، از روش بسیار ساده و جالبی استفاده می‌کنند. به این صورت که پس از چیدن اولین ردیف

گوشه بین دو دیوار، روی لبه اولین ردیف و در امتداد دیوارها ریسمان کشی می‌کنند.

(شکل روبه‌رو) و سپس به وسیله متر روی یک ریسمان 8° سانتی‌متر و روی ریسمان

دیگر به اندازه 6° سانتی‌متر از گوشه دو دیوار جدا کرده

علامت‌گذاری می‌کنند. سپس آنگاه دو سر دیگر ریسمان‌ها (یا یکی از ریسمان‌ها) را



تغییر می دهند تا فاصله بین دو محل علامت گذاری شده دقیقاً به اندازه ی 100 سانتی متر شود. در این وضعیت طرف دیگر ریسمان ها را ثابت کرده و شروع به آجرچینی در امتداد ریسمان ها می کنند. پس از چند ردیف دیوارچینی، قائمه بودن زاویه ی بین دو دیوار کاملاً مشهود خواهد بود. سؤالی که مطرح می گردد این است که آیا این روش، مبنای ریاضی دارد؟

فعالیت ۲-۸

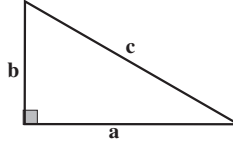
۱. با استفاده از خط کش، مثلث قائم الزاویه ای رسم کنید که طول ضلع های زاویه ی قائمه آن 8 سانتی متر و 15 سانتی متر باشند. برای اطمینان از آنکه زاویه ی رسم شده دقیقاً 90° است، می توانید از یک نقاله و یا گوشه ی راست یک مقوا استفاده کنید.
۲. طول وتر مثلثی را که رسم کرده اید، با دقت به وسیله ی خط کش اندازه بگیرید.
۳. مثلث قائم الزاویه ی دیگری رسم کنید که طول ضلع های زاویه ی قائمه آن 3 سانتی متر و 4 سانتی متر باشد.
۴. طول وتر این مثلث را نیز دقیقاً اندازه بگیرید.
۵. در قسمت ۲، طول وتر چقدر بود؟ در قسمت ۴ چقدر است؟
۶. باتوجه به نتیجه ی قسمت ۵، چه رابطه ای بین طول ضلع های زاویه ی قائمه و طول وتر در مثلث فوق وجود دارد؟

مجله ی ریاضی

فیثاغورس ریاضیدان و فیلسوف یونان باستان بود که 530 سال قبل از میلاد می زیست و رهبر گروهی از فلاسفه بود که بیش از 100 سال در اوج شهرت بودند. این گروه، علاوه بر ریاضیات به موسیقی، اخلاق و مذهب نیز می پرداختند. آن ها کشفیات زیادی در ریاضیات انجام دادند که مطابق آیین خود همه را به فیثاغورس نسبت می دادند، از جمله ثابت کردند که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است. قضیه فیثاغورس را به جرأت می توان معروفترین قضیه هندسه نامید که تا حال بیش از 3700 اثبات برای آن ارائه شده است.

فعالیت ۲-۹

۱. مثلث قائم الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a ، b و c را روی یک تکه مقوا ببرید؛

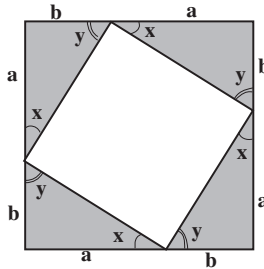


شکل ۲۶

۲. سه مثلث همنهشت با این مثلث را با مقوا تهیه کنید.

۳. مطابق شکل ۲۷، چهار مثلث را طوری کنار هم بگذارید تا مربعی به طول ضلع $a + b$

تشکیل شود.



شکل ۲۷

۴. در شکل ۲۷، چرا زاویه‌هایی که با x نامگذاری شده‌اند، با هم و زاویه‌هایی که با y

نامگذاری شده‌اند با هم برابرند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵. به کمک قضیه مجموع زاویه‌های مثلث، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی چهارضلعی تشکیل

شده در وسط را بیابید.

۶. از قسمت‌های ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای درباره‌ی چهارضلعی وسط به دست می‌آورید؟

۷. مربعی به طول ضلع c یعنی طول وتر این مثلث قائم الزاویه با مقوایی از رنگ متفاوت تهیه

کنید.

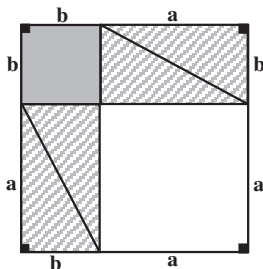
۸. چهار مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت به ضلع‌های a ، b و c و مربعی به ضلع c ، مربع بزرگتر

به ضلع $a + b$ را درست کرده‌اند. در نتیجه:

(۱) مساحت مربع به ضلع c + مساحت چهار مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع بزرگتر

۹. مجدداً با مقوا، چهار مثلث همنهشت با مثلث قائم الزاویه‌ی به طول ضلع‌های a و b و c و دو مربع به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه این مثلث یعنی a و b تهیه کنید.

۱۰. این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل ۲۸ طوری کنار هم قرار دهید تا مربع بزرگتر به طول ضلع $a + b$ ساخته شود.

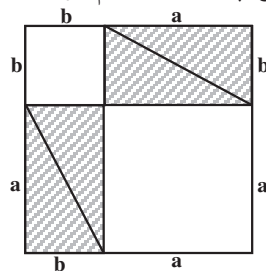
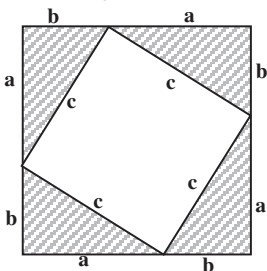


شکل ۲۸

۱۱. شکل ۲۸، از ۶ قسمت مجزاً تشکیل شده است، در نتیجه مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های این ۶ قسمت می‌شود.

(۲) مساحت دو مربع به طول ضلع‌های a و b + مساحت ۴ مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع بزرگتر

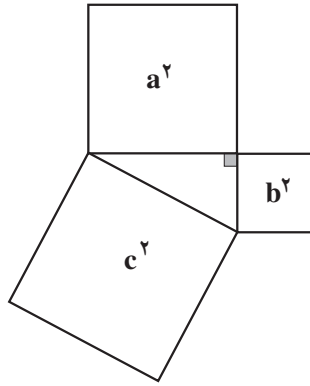
۱۲. از دو مربع همنهشت به طول ضلع $a + b$ در شکل‌های ۲۷ و ۲۸، قسمت‌های مساوی آن‌ها یعنی چهار مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت به طول ضلع‌های a ، b ، و c را بردارید.



شکل ۲۹

آنچه از شکل ۲۷ باقی می‌ماند مربعی است که روی وتر مثلث قائم الزاویه به ضلع‌های a ، b و c ساخته شده است و مساحت آن c^2 است. از شکل ۲۸ هم دو مربعی باقی می‌ماند که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه از همین مثلث ساخته شده است که مساحت‌های آن‌ها به ترتیب a^2 و b^2 است. یعنی مساحت باقی مانده از شکل ۲۷ برابر مساحت باقی مانده از شکل ۲۸ است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



شکل ۳۰

این نتیجه را مستقیماً از رابطه‌ی (۱) و به کمک عبارت‌های جبری نیز می‌توان به‌دست آورد. طول ضلع مربع بزرگتر $a + b$ ، طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث‌های همنهشت a ، b و طول وتر c است. حال رابطه‌ی (۱) را دوباره‌نویسی می‌کنیم:

$$(a + b)^2 = 4 \times \frac{1}{4} ab + c^2$$

از طرفی

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

در نتیجه:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

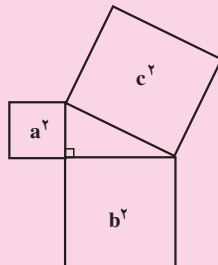
با حذف $2ab$ از دو طرف رابطه‌ی فوق

$$a^2 + b^2 = c^2$$

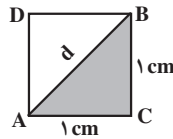
قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن ساخته می‌شود.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



مثال ۸: طول قطر مربعی به ضلع یک سانتی متر را پیدا کنید.



شکل ۳۱

حل: اگر طول قطر d سانتی متر باشد، طبق قضیه ی فیثاغورس در مثلث ABC

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

پس $d = \sqrt{2} \text{ cm}$.

مثال ۹: طول قطر مستطیلی به ضلع های ۳ سانتی متر و ۴ سانتی متر را پیدا کنید.

حل: طبق قضیه ی فیثاغورس، اگر طول قطر را d بنامیم

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

در نتیجه d برابر ۵ سانتی متر است.

مثال ۱۰: طول ضلع های زاویه ی قائمه در یک مثلث قائم الزاویه ۶ واحد و ۷ واحد است.

الف) طول وتر این مثلث را پیدا کنید.

ب) اگر طول ضلع های زاویه قائمه این مثلث ۲ برابر شود، طول وتر آن چه تغییری می کند؟

پ) اگر طول ضلع های این مثلث r برابر شود ($r > 0$)، طول وتر چه تغییری می کند؟

حل: الف) اگر طول وتر مثلث قائم الزاویه را d بنامیم، طبق قضیه ی فیثاغورس

$$d^2 = 6^2 + 7^2$$

$$d = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \text{ واحد}$$

ب) این بار طول ضلع های قائمه دو برابر شده است پس طول وتر

$$d = \sqrt{(2 \times 6)^2 + (2 \times 7)^2}$$

$$= \sqrt{2^2(6^2 + 7^2)}$$

$$= 2\sqrt{6^2 + 7^2} = 2\sqrt{85} \text{ واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز ۲ برابر می شود.

پ) در حالت کلی، اگر ضلع‌های زاویه‌ی قائمه $۶r$ و $۷r$ باشد، پس طول وتر

$$d = \sqrt{(۶r)^2 + (۷r)^2} = \sqrt{r^2(۶^2 + ۷^2)} \\ = r\sqrt{۸۵} \text{ واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز r برابر می‌شود.

مثال ۱۱: نسبت طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ به ۵ است. اگر مساحت مثلث ۱۶ واحد مربع باشد، طول وتر چقدر خواهد بود؟

حل: اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در این مثلث a و b باشد، آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$ ، یعنی $۳b = ۵a$

$$\text{یا } b = \frac{۵}{۳}a$$

چون مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه آن است،

$$۱۶ = \frac{۱}{۲} \times a \times b = \frac{۱}{۲} \times a \times \frac{۵}{۳}a = \frac{۵}{۶}a^2$$

درنتیجه:

$$a^2 = \frac{۶ \times ۱۶}{۵} \quad (۱)$$

از اینجا می‌توانیم طول وتر را به کمک قضیه‌ی فیثاغورس بیابیم. اگر وتر c باشد

$$c^2 = a^2 + b^2$$

چون $b = \frac{۵}{۳}a$ ، پس $b^2 = \frac{۲۵}{۹}a^2$ ، درنتیجه:

$$c^2 = a^2 + \frac{۲۵}{۹}a^2 = \left(1 + \frac{۲۵}{۹}\right)a^2 \\ = \frac{۳۴}{۹}a^2$$

با جایگزین کردن مقدار a^2 از (۱) در تساوی اخیر، به دست می‌آوریم

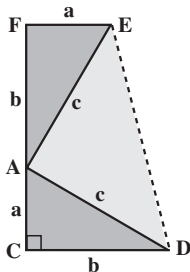
$$c^2 = \frac{۳۴}{۹} \times \frac{۶ \times ۱۶}{۵} = \frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}$$

و سرانجام

$$c = \sqrt{\frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}}$$

۱۰-۲ فعالیت

دوزنقه‌ی FEDC را در نظر بگیرید (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

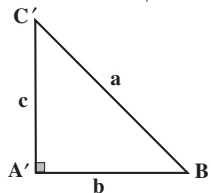
۱. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b به دست آورید.
۲. نشان دهید مثلث ADE قائم الزاویه است.
۳. مساحت مثلث‌های ACD و AEF را پیدا کنید.
۴. مساحت دوزنقه را بر حسب مجموع مساحت‌های مثلث‌های ACD، AEF و ADE به دست آورید.
۵. با استفاده از ۱ و ۴، قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.

طبق قضیه ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع های دو ضلع زاویه ی قائمه است. یعنی اگر طول ضلع های زاویه ی قائمه b ، c و طول وتر a باشد، آنگاه

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۱)$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی آیا اگر در مثلثی با طول ضلع‌های a ، b و c ، رابطه‌ی (۱) برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث قائم‌الزاویه است؟

فرض کنید رابطه‌ی (۱) برای مثلث ABC به طول ضلع‌های a, b و c برقرار باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'B'C'$ را به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b و c رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است زاویه‌ی قائمه‌ای به رأس A' رسم کنیم، سپس روی ضلع‌های این زاویه پاره‌خط‌هایی به طول‌های b و c جدا می‌کنیم و انتهای پاره‌خط‌ها را به ترتیب B' و C' می‌نامیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

حال C' را به B' وصل می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید. چون این مثلث قائم‌الزاویه است. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$B'C'^2 = b^2 + c^2$$

و با توجه به رابطه (۱)

$$B'C'^2 = a^2$$

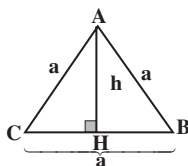
یعنی $B'C' = a$. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند. در نتیجه زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی، با هم برابرند. چون $\hat{A}' = 90^\circ$ پس $\hat{A} = 90^\circ$. به این ترتیب، عکس قضیه‌ی فیثاغورس ثابت می‌شود.

عکس قضیه‌ی فیثاغورس

اگر در مثلث ABC ، $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$ ، آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال ۱۲: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a را حساب کنید.

حل: ارتفاع وارد بر ضلع BC (یا یکی از دو ضلع دیگر) را رسم می‌کنیم:



شکل ۳۴

چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن ضلع نیز می‌باشد،

پس

$$BH = HC = \frac{1}{2}a$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه AHC ،

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

مقدارهای $AC = a$ و $HC = \frac{1}{4}a$ را در رابطه‌ی فوق جایگزین می‌کنیم تا طول ارتفاع $AH = h$ را بر حسب a به دست آوریم:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

پس

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

با دانستن مقدار ارتفاع و قاعده، مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:

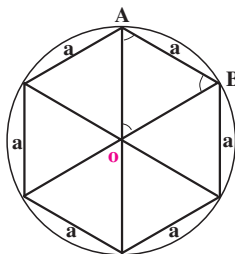
$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث } ABC &= \frac{1}{2} \times AH \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

در نتیجه:

مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

مثال ۱۳: مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را پیدا کنید.

حل: مرکز دایره را به رئوس شش ضلعی منتظم وصل می‌کنیم، شش مثلث پدید می‌آید:



چون مجموع زاویه‌های مرکزی 36° است و هر کدام از زاویه‌های مرکزی روبه‌روی وترهای مساوی هستند، پس هر شش زاویه‌ی مرکزی با هم مساوی و هر کدام برابر $6^\circ = 36^\circ \div 6$ می‌باشد، (چرا؟) همچنین، شش مثلث فوق متساوی‌الساقین هستند زیرا دو ضلع هر کدام در واقع شعاع‌های دایره می‌باشند. در نتیجه دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع‌ها با هم برابرند. از طرفی، زاویه‌ی سوّم هر یک از این مثلث‌ها زاویه‌ی مرکزی و 6° است و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث نیز 180° است. پس

$$180^\circ - 6^\circ = \text{مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع}$$

$$= 174^\circ$$

و چون این دو زاویه با هم برابرند،

$$\frac{174^\circ}{2} = \text{هر زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع}$$

$$= 87^\circ$$

بنابراین هر سه زاویه‌ی هریک از مثلث‌ها مساوی 87° است. پس نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند و چون طول ضلع همه‌ی آن‌ها برابر a است پس این مثلث‌ها همنهشت هم می‌باشند. بنابراین،

$$\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } a \times 6 = \text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

مسائل

۱. طول قطر مربعی را به دست آورید که طول ضلع آن برابر است با :

الف) ۳ cm ؛

ب) ۵ cm ؛

پ) a سانتی متر.

۲. طول قطر مستطیلی را به دست آورید که طول ضلع‌های آن برابر است با :

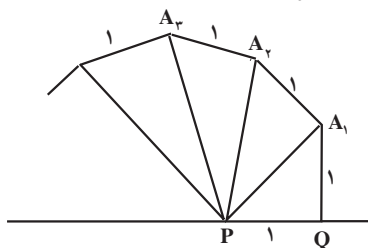
الف) ۳ و ۵

ب) ۴ و ۷

ت) $4r$ و $7r$

پ) $3r$ و $5r$

۳. مساحت مربعی ۱۴۴ سانتی متر مربع است. طول قطر این مربع چقدر است؟
۴. در یک مثلث قائم الزاویه، طول یک ضلع زاویه قائمه دو برابر طول ضلع دیگر است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتی متر مربع باشد، طول وتر مثلث چقدر است؟
۵. در شکل روبرو، طول هریک از اضلاع زاویه قائمه در



مثلث PQA_1 ، برابر ۱ سانتی متر است.

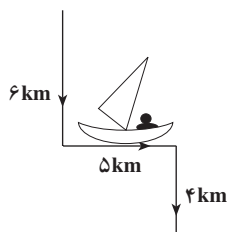
الف) طول وتر PA_1 چقدر است؟

پاره خط A_1A_2 نیز به طول ۱ سانتی متر و بر PA_1 عمود است. طول پاره خط A_2A_3 نیز ۱ سانتی متر است و بر PA_2 عمود است، ...

ب) طول پاره خط PA_2 چقدر است؟

پ) طول پاره خط PA_3 چقدر است؟

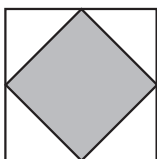
طول n - امین پاره خط یعنی PA_n چقدر است؟



۶. یک قایق از نقطه‌ی شروع حرکت، ۶ کیلومتر به سمت جنوب، ۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است. این قایق چند کیلومتر از نقطه‌ی شروع حرکت فاصله دارد؟

۷. نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

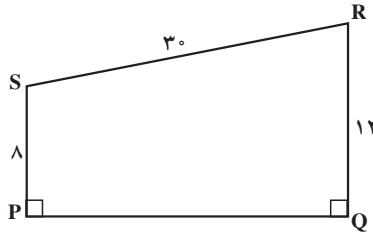
۸. طول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای $\frac{4}{5}$ دیگری است. مساحت مثلث 320 سانتی متر مربع است. طول اضلاع زاویه قائمه را بیابید.



۹. از به هم وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مربعی، یک مربع دیگر ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچکتر به مساحت مربع بزرگتر چقدر است؟

۱۰. مساحت مربعی که طول قطر آن $8\sqrt{2}$ است را پیدا کنید.

۱۱. در شکل زیر، طول ضلع PQ را محاسبه کنید.

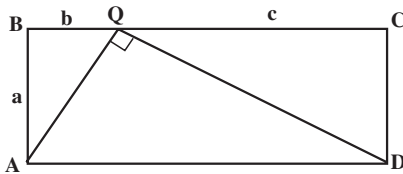


۱۲. در شکل زیر، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم الزاویه است. اگر

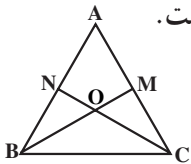
$AB = a$ ، $BQ = b$ و $QC = c$ ، ثابت کنید:

$$AD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{الف})$$

$$a^2 = bc \quad (\text{ب})$$



۱۳. در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبه روبه زاویه 30° نصف وتر است.



۱۴. در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر

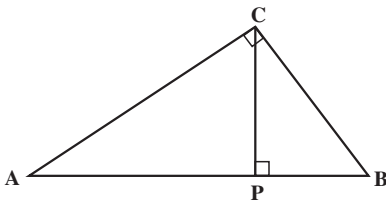
را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند ثابت کنید: $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2$

۱۵. مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C، پاره خط CP را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت

کنید:

$$PC^2 = AP \times PB \quad (\text{الف})$$

$$AC^2 = AP \times AB \quad (\text{ب})$$

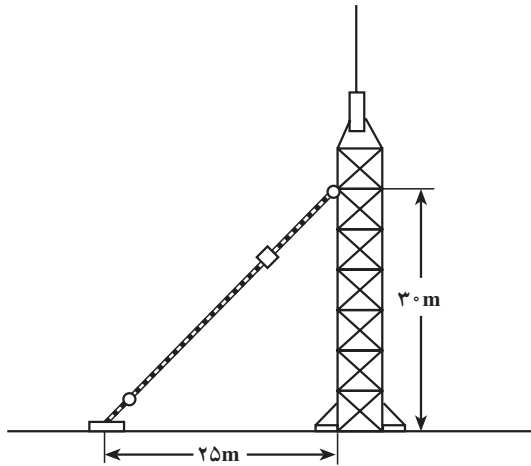


۱۶. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس ثابت کنید، اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از

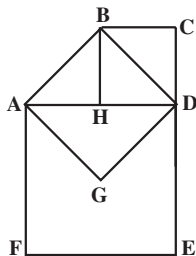
یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر برابر باشند،

طول اضلاع دیگر زاویه‌ی قائمه در دو مثلث با هم برابرند.

۱۷. یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع 30° متری توسط یک سیم به طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟

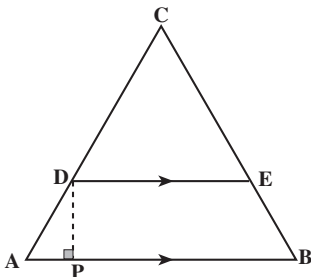


۱۸. سه مربع مانند شکل، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ADG را در هریک از حالت‌های زیر به دست آورید.



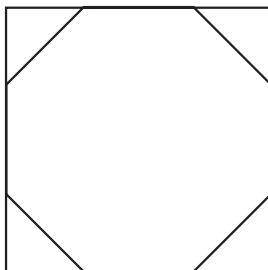
- الف) $AF = 10$ ؛
 ب) $CE = 18$ ؛
 پ) $BD = 3\sqrt{2}$ ؛
 ت) مساحت مربع $BCDH = 49$ ؛
 ث) مساحت شکل $AGDEF = 27$ ؛

۱۹. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع 10 واحد را در نظر بگیرید و پاره خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر 4 واحد گردد.

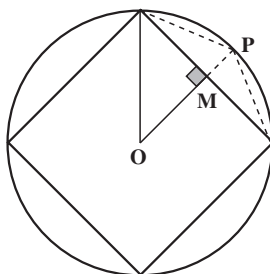


- الف) طول DP را به دست آورید.
 ب) طول PE را محاسبه کنید.
 پ) چگونه با سه بُرش روی دوزنقه $ABED$ می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ۸ واحد ساخت؟ آیا با دو بُرش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۰. در شکل زیر یک هشت ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.



- الف) اگر طول ضلع هشت ضلعی ۲ سانتی متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید.
 ب) اگر طول ضلع مربع 10° سانتی متر باشد، محیط هشت ضلعی را به دست آورید.
 ۲۱. مربعی در یک دایره به شعاع واحد محاط شده است.



- الف) فاصله ی مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.
 ب) طول MP را به دست آورید.
 پ) طول ضلع هشت ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می شود را محاسبه کنید.
 ۲۲. مسأله ی ۲۱ را در حالتی که یک شش ضلعی در دایره محاط شده باشد، در نظر بگیرید
 و طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره را بدست آورید.

تکلیف



۳-۱- نسبت و تناسب

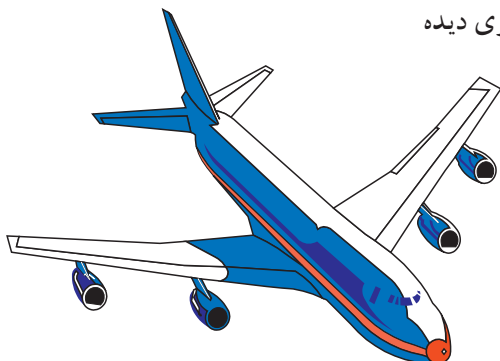
به این دو تصویر نگاه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین آن‌ها وجود دارد؟



هر دو در واقع یک تصویر ولی با اندازه‌های مختلف هستند. این شکل‌های شبیه به هم نمونه‌ای از شکل‌های متشابه می‌باشند.

شکل‌های متشابه کاربردهای بسیاری در زندگی معمولی ما دارند. برای مثال، یکی از بهترین راه‌های دادن آدرس به افراد، استفاده از نقشه است. نقشه، تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچک‌تر و متشابه با آن است. همچنین، برای ساختن یک ساختمان یا یک وسیله، طراحی ماکت آن که مشابه با ساختمان یا وسیله اصلی است، کمک مهمی به حساب می‌آید.

در شکل روبه‌رو، تصویر یک هواپیمای اسباب‌بازی دیده



می‌شود. فرق این تصویر با هواپیمای واقعی این است که اندازه‌های اجزای آن نسبت به هواپیمای واقعی خیلی کوچک‌تر است، یعنی شکل‌های هواپیمای واقعی و اسباب‌بازی متشابه هستند. در دو شکل متشابه، اندازه‌های اجزای یک شکل با اندازه‌های اجزای نظیر در شکل دیگر متناسب هستند و این ویژگی در ساختن تمام ماکت‌ها نیز رعایت می‌شود.

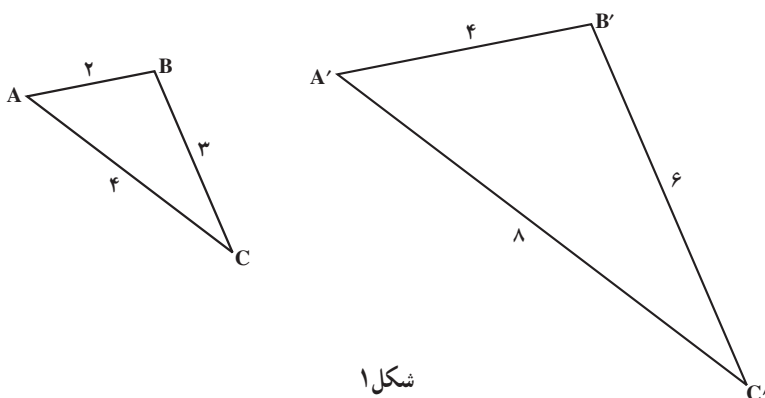
یکی دیگر از مثال‌های ملموس شکل‌های متشابه، بزرگ شده یا کوچک شده‌ی تصویر چهره‌ی

انسان است.



برای مثال، در تصویرهای ۳×۴ و ۸×۱۲ نسبت فاصله‌ی دو چشم برابر با نسبت فاصله‌ی بینی تا دهان در دو تصویر است. به همین ترتیب، نسبت موجود در تمام اجزای متناظر در دو تصویر ثابت می‌ماند. یعنی، به جز اندازه‌های ابعاد دو عکس، تفاوت دیگری بین این دو تصویر دیده نمی‌شود. در واقع، با دیدن هریک از آن‌ها می‌توانید صاحب تصویر واقعی را در نظر مجسم کنید.

در شکل ۱، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو شکل متشابه هستند، زیرا از هر نظر شبیه یکدیگرند، جز این که اندازه‌ی هر ضلع مثلث $A'B'C'$ ، دو برابر اندازه‌ی هر ضلع مثلث ABC است، یعنی

$$A'B' = 2AB, \quad B'C' = 2BC, \quad A'C' = 2AC$$


شکل ۱

بنابراین، نسبت هر ضلع مثلث بزرگ به ضلع نظیر آن در مثلث کوچک برابر با ۲ است و تمام این نسبت‌ها با هم برابرند، یعنی

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2$$

که هر دو نسبت برابر تشکیل یک تناسب می‌دهند. از نسبت و تناسب در حل مسائل مختلف ریاضی استفاده می‌شود.

مثال ۱: اگر قیمت ۵ خودکار ۲۵° تومان باشد، چند خودکار با ۱۵° تومان می‌توان خرید؟
 حل: قیمت ۵ خودکار ۲۵° تومان است. پس قیمت هر خودکار

$$\frac{۲۵^\circ}{۵} = ۵^\circ \text{ تومان}$$

اگر با ۱۵° تومان بتوان a خودکار خرید، آن‌گاه

$$\frac{۱۵^\circ}{a} = \frac{۲۵^\circ}{۵} = ۵^\circ$$

و یک تناسب به دست می‌آید، که به راحتی می‌توان a را از آن به دست آورد:

$$a = \frac{15^\circ}{5^\circ} = 3$$

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ ، که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد. تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، (که b و d صفر نیستند) یک تناسب نامیده می‌شود.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، a و d دو جمله‌ی کناری (طرفین) و b و c دو جمله‌ی میانی (وسطین) نام دارند. همچنین، اگر دو طرف تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم،

$$bd\left(\frac{a}{b}\right) = bd\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$ad = bc$$

آنگاه

در تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی برابر حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری است.

$$ad = bc$$

این ویژگی، ما را در حل مسائل مربوط به نسبت و تناسب و شکل‌های متشابه یاری می‌کند.

مثال ۲: در هریک از تناسب‌های زیر، مقدار m را پیدا کنید:

$$\frac{m}{m+2} = \frac{3}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{m}{3} = \frac{9}{10} \quad (\text{الف})$$

حل: ویژگی مهم تناسب که در بالا به آن اشاره شد، کمک می‌کند که مقدار m را در

قسمت‌های (الف) و (ب) به دست آوریم:

$$10m = 3 \times 9$$

(الف)

$$10m = 27$$

$$m = \frac{27}{1}$$

پس

$$\begin{aligned} 4m &= 3(m+2) \\ &= 3m+6 \end{aligned}$$

(ب)

در نتیجه :

$$\begin{aligned} 4m - 3m &= 6 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

پس

مثال ۳: مقدارهای x و y را از تناسب‌های

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{y} \text{ و } \frac{1}{y} = 3 \quad (۱)$$

به دست آورید.

حل: چون $\frac{1}{y} = 3$ پس $3y = 1$ یعنی $y = \frac{1}{3}$. از طرف دیگر از تناسب $\frac{x}{4} = \frac{1}{y}$ نتیجه می‌گیریم

$$xy = 4 \times 1 = 4 \quad (۲)$$

مقدار $y = \frac{1}{3}$ را که از تناسب قبل به دست آمد، در (۲) جایگزین می‌کنیم.

$$x \times \frac{1}{3} = 4$$

یعنی :

$$x = 3 \times 4 = 12$$

دو تناسب رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{y} = 3$$

مثال ۴: مقدار n را در تناسب

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{n}$$

به دست آورید.

حل: چون $3n = 9 \times 9 = 81$ پس

$$n = \frac{81}{3} = 27$$

عدد ۹ یک میانگین هندسی^۱ دو عدد ۳ و ۲۷ نامیده می‌شود.

۱- به میانگین هندسی، واسطه هندسی نیز گفته می‌شود.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، b میانگین هندسی دو جمله‌ی کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^2 = ac$ به دست می‌آید.

فعالیت ۱-۳

آیا عدد π را به یاد می‌آورید؟ π نسبت محیط دایره به قطر آن است. ریاضیدانان باستان مقدار π را با تقریب‌های خوبی به دست آورده بودند و در محاسبات، از آن استفاده می‌کردند. آن‌ها مقدارهای تقریبی π را به صورت نسبت بیان می‌کردند. دو نسبت معروف در تاریخ ریاضی که به عنوان تقریب π به کار می‌رفته‌اند، عبارت از $\frac{22}{7}$ و $\frac{355}{113}$ هستند.

۱. نسبت $\frac{22}{7}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۲. نسبت $\frac{355}{113}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۳. چه رابطه‌ای بین مقدارهای تقریبی به دست آمده در قسمت‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟

۴. برای دو نسبت $\frac{22}{7}$ و $\frac{355}{113}$ حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی و حاصل ضرب دو جمله‌ی

کناری را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵. علت تفاوت بین پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ در چیست؟

بعضی از ریاضی‌دانان ایرانی نیز نسبت $\frac{22}{7}$ را به جای مقدار π به کار می‌برده‌اند. نخستین

ریاضی‌دانی که مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (۷۶۳-۸۰۷ هجری) بود.

بعضی از ویژگی‌های مهم تناسب که کاربرد بسیاری در حل مسائل تشابه دارند در اینجا گردآوری شده‌اند.

۱. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله میانی را عوض کرد و تناسب

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ را به دست آورد.}$$

۲. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ را

به دست آورد.

۳. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آنگاه $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ؛

۴. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ، آنگاه، $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$.

مثال ۵: به کمک ویژگی‌های تناسب، مقدار p را از تناسب

$$\frac{v-p}{p} = \frac{12}{20}$$

پیدا کنید.

حل: بنابر ویژگی ۳، $\frac{(v-p)+p}{p} = \frac{12+20}{20}$

در نتیجه: $\frac{v}{p} = \frac{32}{20}$

یعنی: $32p = 140$

پس: $p = \frac{140}{32} = \frac{35}{8}$

مسائل

۱. اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد، قیمت چند عدد از آن، ۸۰ تومان خواهد بود؟

۲. میانگین هندسی بین هریک از جفت عددهای زیر را پیدا کنید:

الف) ۴ و ۲۵؛

ب) $3\sqrt{2}$ و $6\sqrt{2}$ ؛

پ) ۷ و ۲۱؛

۳. در هریک از موارد زیر، از کدام یک از ویژگی‌های تناسب استفاده شده است؟

الف) اگر $\frac{a}{b} = \frac{8}{5}$ ، آنگاه $5a = 8b$ ؛

ب) اگر $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ ، آنگاه $\frac{d}{c} = \frac{4}{3}$ ؛

پ) اگر $\frac{e}{v} = \frac{4}{9}$ ، آنگاه $\frac{v}{e} = \frac{9}{4}$ ؛

ت) اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{11}$ ، آنگاه $\frac{a+3}{3} = \frac{b+11}{11}$.

۴. در هریک از موارد زیر جای خالی را پر کنید:

الف) اگر $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $\frac{x+1}{y+2} = \square$ ؛

ب) اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5}$ ، آنگاه $\frac{a+b+c+d}{\square} = \frac{a}{\square}$ ؛

پ) اگر $\frac{3}{10} = \frac{12}{x}$ ، آنگاه $\frac{12}{3} = \square$.

۵. در هریک از موارد زیر مقدار x را به دست آورید:

الف) $\frac{4}{5} = \frac{24}{x}$

ب) $\frac{x}{180-x} = \frac{3}{7}$

پ) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$

ت) $\frac{4}{x+1} = \frac{2}{3x-2}$

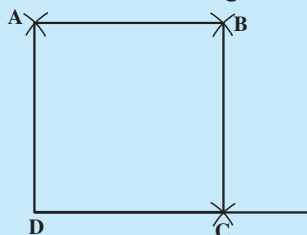
۶. مقدار x و y را از هر کدام از تناسب‌های زیر محاسبه کنید:

الف) $\frac{9}{12} = \frac{x}{20} = \frac{21}{y}$

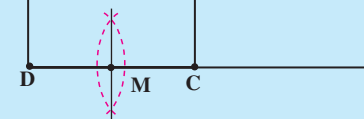
ب) $\frac{x}{5} = \frac{20}{x} = y$

مجله‌ی ریاضی

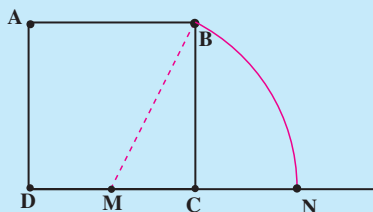
۱. مربع ABCD را با ضلع دلخواه رسم کنید.



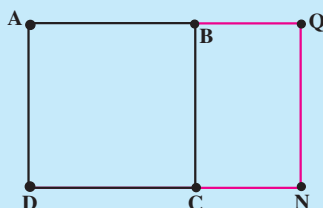
۲. وسط ضلع DC را بیابید و آن را M بنامید.



۳. به مرکز M و با شعاع MB کمانی بزنید تا امتداد DC را در نقطه N قطع کند.



۴. از نقطه N، خطی عمود بر DC رسم کنید تا امتداد AB را در Q قطع کند.



چهارضلعی AQND یک مستطیل طلایی نامیده می‌شود که به وسیله BC به یک مربع و یک مستطیل بازهم طلایی تقسیم شده است! هر دو شکل AQND و BQNC مستطیل‌های طلایی هستند که ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم متناسبند.

۵. برای نشان دادن این که چرا ضلع‌های دو مستطیل با هم متناسب هستند، فرض کنید در مستطیل زیر، $MC = 1$ سپس اندازه‌ی طول‌های زیر را حساب کنید:

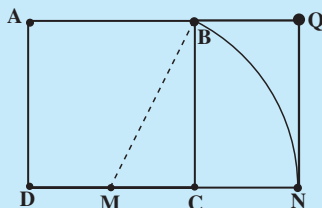
پ) MN

ب) MB

الف) BC

ث) DN

ت) CN



۶. با استفاده از طول‌های به‌دست آمده در قسمت (۵)، نشان دهید که اجزای متناظر مستطیل AQND و مستطیل BQNC با هم متناسب هستند.

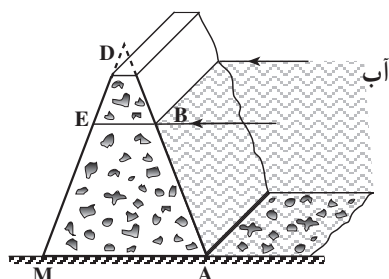
جالب است بدانید که نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوتاه‌تر مستطیل طلایی که نسبت طلایی نامیده می‌شود، در بسیاری از طرح‌های هنری از قبیل معماری و خطاطی ظاهر می‌شود. مطابق تحقیقات انجام شده، نسبت طول ضلع قاعده به ارتفاع، در اهرام ثلاثه مصر، برابر نسبت طلایی است. همچنین دیوارهای معبد پارتنون از مستطیل‌های طلایی ساخته شده است! زیرا به اعتقاد آن‌ها، مستطیل‌های با نسبت‌های طلایی به چشم خوشایندتر هستند!



سد جیرفت

۳-۲. قضیه تالس در مثلث

شکل ۲، نمای جانبی ساده‌ای از یک سد را نشان می‌دهد. سطح مقطع قائم سد، مثلث



شکل ۲

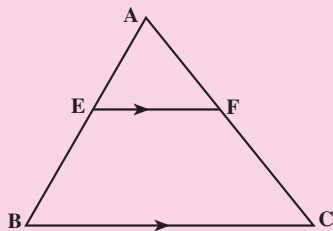
DAM^۱ است. همان‌طور که می‌بینید، خط سطح آب پشت سد، موازی ضلع پایینی مثلث است. چون مقاومت سد در برابر فشار آب پشت آن به عوامل متعددی از جمله طول BA بستگی دارد، در نتیجه محاسبه‌ی طول BA برای به‌دست آوردن مقاومت سد ضروری است. قضیه‌ی تالس در مثلث به ما کمک می‌کند تا این طول را محاسبه کنیم.

۱. DAM در انگلیسی به معنای سد است!

قضیه‌ی تالس

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.

یعنی اگر در مثلث ABC ، EF موازی BC باشد، آنگاه $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

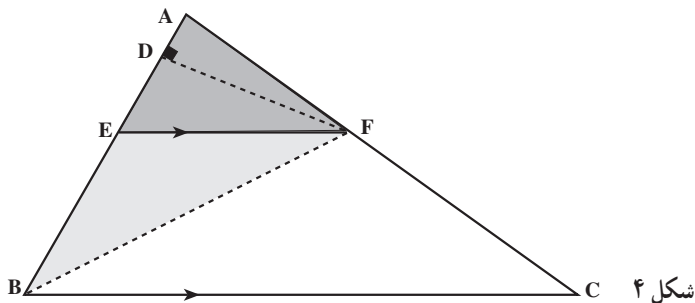


شکل ۳

قبل از این که به اثبات قضیه تالس بپردازیم، کاربرد این قضیه را در مثال سد می‌بینیم. در شکل ۲، چون پاره‌خط BE موازی AM است و ضلع‌های DM و DA را قطع می‌کند، در نتیجه طبق قضیه‌ی تالس، نسبت طول دو پاره‌خط DB و BA برابر نسبت طول دو پاره‌خط DE و EM است. یعنی:

$$\frac{DB}{BA} = \frac{DE}{EM}$$

حال قضیه‌ی تالس را در چهار مرحله با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم.
مرحله‌ی ۱: از F به B وصل کرده، سپس پاره‌خط FD را بر AB عمود می‌کنیم. پاره‌خط FD ارتفاع نظیر قاعده‌ی AE از مثلث AFE و همچنین ارتفاع نظیر قاعده‌ی EB از مثلث EFB خواهد بود. بنابراین



شکل ۴

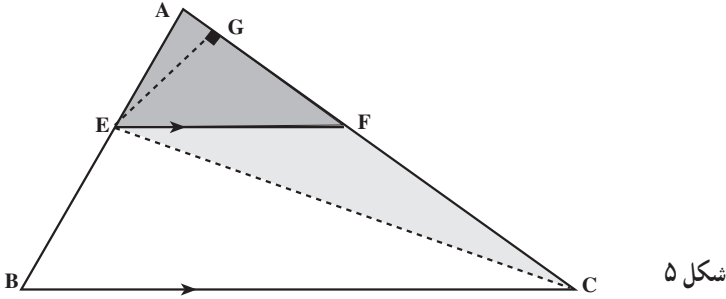
$$\text{مساحت مثلث } AFE = \frac{1}{2} AE \times FD$$

$$\text{مساحت مثلث } EFB = \frac{1}{2} EB \times FD$$

در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFB}} = \frac{AE}{EB} \quad (۱)$$

مرحله ی ۲: از E به C وصل کرده، سپس پاره خط EG را بر AC عمود می کنیم، در این صورت

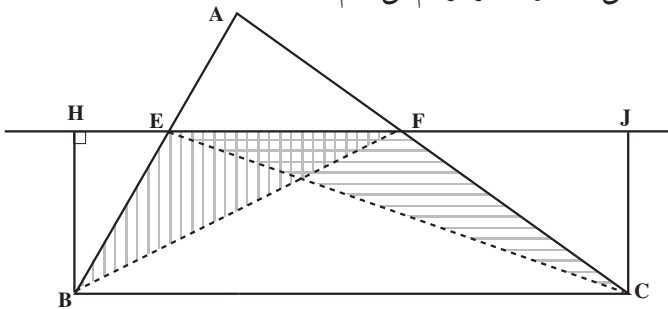


$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFC}} = \frac{AF}{FC}$$

(۲)

دلیل درستی تساوی (۲) را توضیح دهید.

مرحله ی ۳: پاره خط EF را از دو طرف امتداد می دهیم. سپس ارتفاع های نظیر قاعده ی EF در دو مثلث EFB و EFC، یعنی BH و CJ را رسم می کنیم.



شکل ۶

چهارضلعی BHJC یک مستطیل است. (چرا؟) بنابراین

$$BH = CJ$$

از طرفی

$$\text{مساحت مثلث EFB} = \frac{1}{2} EF \times BH$$

$$\text{مساحت مثلث EFC} = \frac{1}{2} EF \times CJ$$

در نتیجه :

$$\text{مساحت مثلث EFC} = \text{مساحت مثلث EFB} \quad (3)$$

مرحله ی ۴: در رابطه ی (۲) می توان در مخرج کسر سمت چپ با استفاده از رابطه ی (۳) مساحت مثلث EFB را قرار داد. یعنی :

$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFB}} = \frac{AF}{FC} \quad (4)$$

مقایسه ی (۴) و (۱) نشان می دهد که سمت چپ تساوی ها با هم برابرند. در نتیجه :

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad (5)$$

و به این ترتیب قضیه ی تالس ثابت می شود.

تمرین: در شکل ۲، اگر $DB = 30\text{m}$ ، $DE = 20\text{m}$ و $DM = 100\text{m}$ باشد، با استفاده از قضیه ی تالس، طول BA را پیدا کنید.

نتیجه ی ۱: چون از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می آید، پس از تناسب (۵) نتیجه می شود.

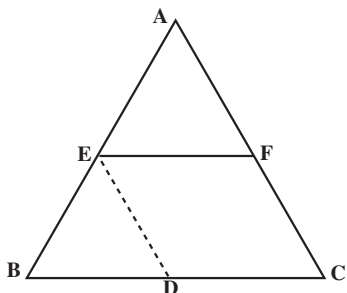
$$\frac{AE}{AE + EB} = \frac{AF}{AF + FC}$$

یعنی :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (6)$$

نتیجه ی ۲: در مثلث ABC، پاره خط EF موازی BC است. اگر از نقطه ی E، پاره خط ED موازی AC رسم کنیم، با دو بار استفاده از قضیه ی تالس در مثلث ABC، نتیجه ی مهم زیر به دست می آید.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad (7)$$



شکل ۲

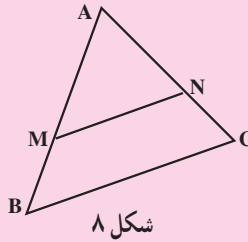
تمرین: رابطه‌ی (۷) را ثابت کنید.

راهنمایی: چهارضلعی EDCF متوازی الاضلاع است، در نتیجه $EF = DC$.

نتیجه‌ی ۳: (عکس قضیه تالس) اگر در مثلث ABC (شکل ۸) نقطه‌های M و N

طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، آنگاه می‌توان

نتیجه گرفت که پاره‌خط MN موازی ضلع BC است.

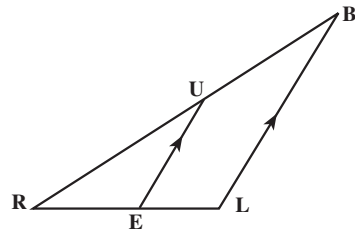
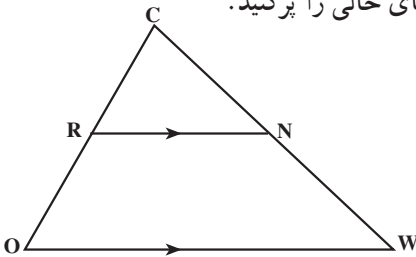


تمرین: برای اثبات نتیجه‌ی ۳ از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D

قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.

مسائل

۱. با توجه به شکل‌ها، در هر کدام از موارد زیر جای خالی را پر کنید.



در مثلث COW، پاره‌خط RN با پاره‌خط OW موازی است:

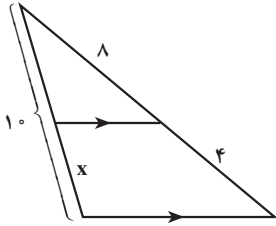
$$\frac{NW}{CW} = \square \text{ (ب)}$$

$$\frac{OR}{RC} = \square \text{ (الف)}$$

در مثلث RBL، پاره‌خط EU با پاره‌خط LB موازی است:

$$\frac{RU}{RB} = \square \text{ (ت)}$$

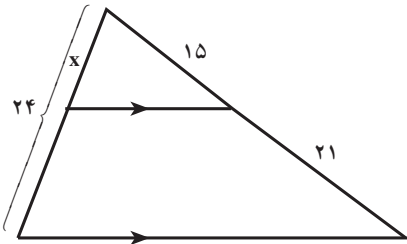
$$\frac{EL}{RE} = \square \text{ (پ)}$$



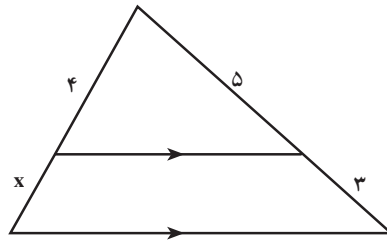
۲. دو دانش آموز تصمیم گرفتند به کمک قضیه‌ی تالس طول x را در شکل روبه‌رو به دست آورند.

دانش آموز اول تناسب $\frac{x}{10-x} = \frac{4}{8}$ و دانش آموز دوم تناسب $\frac{x}{10} = \frac{4}{8}$ را نوشت. کدامیک

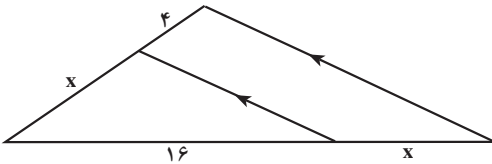
از این دو تناسب صحیح است؟ به نظر شما تناسب درستی که x را به دست می‌دهد کدام است؟
۳. در هر یک از شکل‌های زیر طول مجهول x را محاسبه کنید:



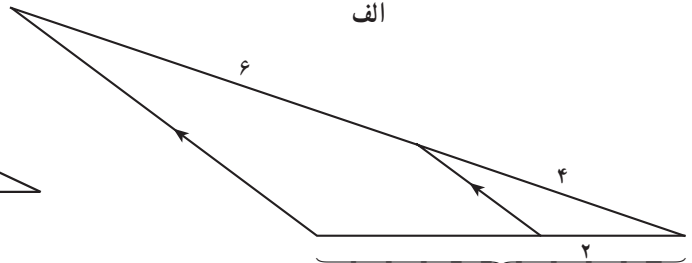
ب



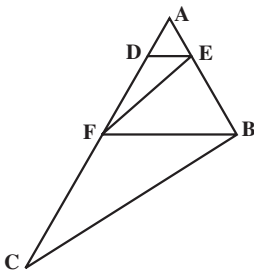
الف



ت

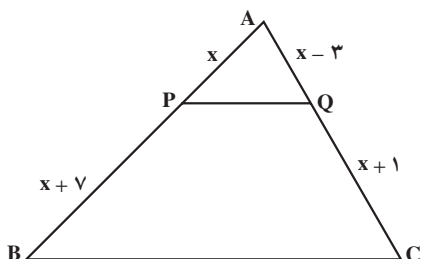


پ

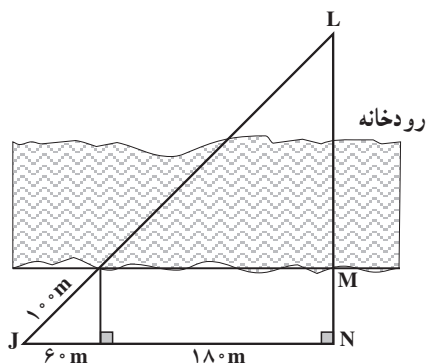


۴. در مثلث ABC ، در شکل روبه‌رو، DE با FB موازی است و EF با BC . با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$



۵. در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. به کمک قضیه‌ی تالس طول x را حساب کنید.



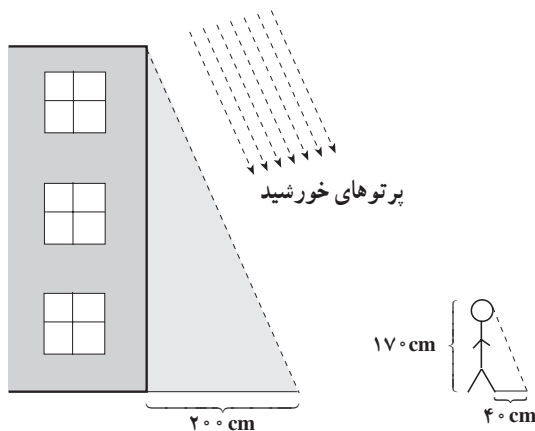
۶. دهکده‌ای در یک سوی رودخانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.

۳-۳- مثلث‌های متشابه

معلم درس هندسه‌ی آرش تصمیم گرفت به دانش‌آموزی که بتواند فقط به کمک یک خط‌کش ارتفاع ساختمان مدرسه را اندازه‌گیری کند، جایزه بدهد. آرش اندیشید که چگونه باید این کار را انجام دهد؟ ارتفاع ساختمان مدرسه خیلی بلندتر از خط‌کش او بود. او از خود پرسید آیا می‌توان راه راحت‌تری برای محاسبه‌ی ارتفاع ساختمان بدون اندازه‌گیری مستقیم آن پیدا کرد؟ ظهر در راه منزل،

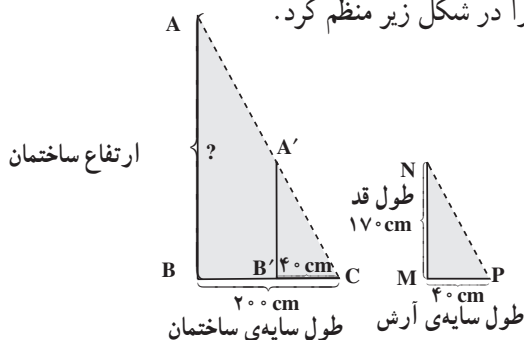


در حالی که به زمین خیره شده بود ناگهان متوجه این نکته جالب شد که طول سایه در ظهر خیلی کوتاه است و اندازه گیری آن با خط کش امکان پذیر می باشد؟! آرش فوراً به مدرسه بازگشت و طول سایه ی ساختمان مدرسه که بر زمین عمود بود و طول سایه ی خود را در حالت ایستاده به وسیله ی خط کش اندازه گرفت. او سپس قامت و سایه ی خود همچنین ساختمان و سایه ی آن را ضلع های دو مثلث قائم الزاویه در نظر گرفت.



شکل ۹

آیا این اطلاعات برای تعیین اندازه ی ارتفاع ساختمان مدرسه کافی بود؟
آرش اطلاعات خود را در شکل زیر منظم کرد.



شکل ۱۰

آنگاه $B'C$ را روی ضلع BC به اندازه ی MP جدا کرد و $A'B'$ را نیز بر BC عمود نمود. چون دو خط $A'B'$ و AB بر BC عمودند، پس با هم موازی هستند. بنابراین، با استفاده از نتیجه ی ۲

۱- شعاع های تابش با هم موازیند.

قضیه ی تالس

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C} = \frac{AC}{A'C} \quad (۱)$$

آرش همچنین از همنهشتی دو مثلث $A'B'C$ و NMP (به حالت ضز) تساوی $A'B' = NM$ را به دست آورد و در (۱) جایگزین کرد :

$$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{MP} \quad (۲)$$

$$\frac{AB}{۱۷۰} = \frac{۲۰۰}{۴۰} \quad \text{یا}$$

در نتیجه :

$$AB = \frac{۱۷۰ \times ۲۰۰}{۴۰}$$

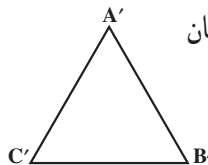
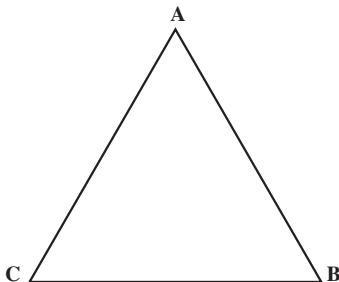
$$AB = ۸۵ \text{ cm} = \text{ارتفاع ساختمان}$$

در شکل ۱۰، زاویه ی C در دو مثلث ABC و $A'B'C$ مشترک است و زاویه های B و B' هر دو قائمه و برابرند. پس زاویه های A و A' نیز مساوی اند. همچنین دو مثلث $A'B'C$ و NMP همنهشت هستند، در نتیجه زاویه های نظیر دو مثلث ABC و NMP نیز با هم مساوی اند. از طرف دیگر، چون $MN = A'B'$ ، $MP = B'C$ و $NP = A'C$ ، رابطه ی (۱) را می توان به صورت

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{MP} = \frac{AC}{NP}$$

نوشت، یعنی ضلع های نظیر در دو مثلث متناسبند. در این حالت، دو مثلث را متشابه می نامند.

دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه های نظیر در آن ها برابر و ضلع های نظیر متناسب باشد.



مثال ۵: در شکل ۱۱ دو مثلث

متساوی الاضلاع ABC و $A'B'C'$ نشان داده شده اند.

چون هر زاویه مثلث متساوی الاضلاع 60° است، بنابراین زاویه‌های این دو مثلث با هم برابرند. از طرف دیگر، چون طول ضلع‌های هر مثلث متساوی الاضلاع نیز مساوی هستند، هر سه نسبت $\frac{AB}{A'B'}$ ، $\frac{AC}{A'C'}$ و $\frac{BC}{B'C'}$ با هم برابر خواهند بود زیرا دارای صورت‌های مساوی و مخرج‌های مساوی هستند. پس دو مثلث متساوی الاضلاع به دلیل تناسب ضلع‌های نظیر و تساوی سه زاویه، طبق تعریف با هم متشابه هستند.

هر دو مثلث متساوی الاضلاع، متشابه هستند.

۳-۴- حالت‌های تشابه دو مثلث

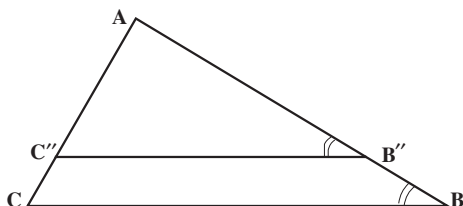
دو مثلث در سه حالت با هم متشابه‌اند.

۳-۴-۱- تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه

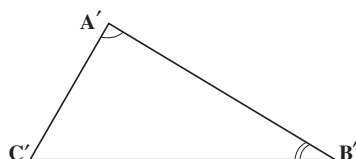
آرش فقط با استفاده از تساوی دو زاویه $\hat{P}$ و $\hat{C}$ ، تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و NMP را نتیجه گرفت، پس اگر یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. چون زاویه‌های قائمه در این دو مثلث نیز با هم برابرند، پس دو زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابرند. این مطلب نه فقط برای دو مثلث قائم‌الزاویه بلکه برای هر دو مثلثی درست است، یعنی:

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

برای نشان دادن درستی این حالت، شکل ۱۲ را در نظر می‌گیریم. در این شکل، زاویه‌های A و A' با هم و زاویه‌های B و B' نیز با هم برابرند.



شکل ۱۲



نقطه‌ی B' را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AB' = A'B'$ و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در C' قطع کند. دو مثلث $A'B'C'$ و $AB'C'$ به حالت (زضز) همنهشت هستند (چرا؟) بنابراین $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$.

چون پاره‌خط $B'C'$ موازی ضلع BC است، در مثلث ABC بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

همچنین، $AB' = A'B'$ ، $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$ پس

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

یعنی ضلع‌های دو مثلث متناسب هستند. از طرف دیگر، زاویه‌های سوم دو مثلث ABC و

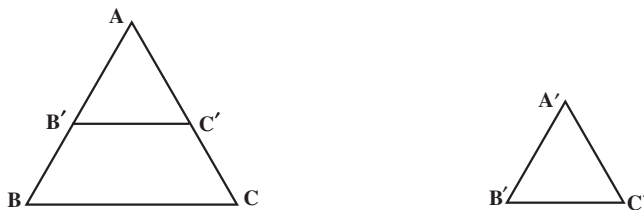
$A'B'C'$ باهم برابرند، زیرا $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ و چون $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ$

پس $\hat{C} = \hat{C}'$. در نتیجه طبق تعریف تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

۳-۴-۲- تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آنها: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۱۳)

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (۱)$$



شکل ۱۳

برای نشان دادن تشابه دو مثلث در این حالت، باید تساوی دو زاویه‌ی دیگر و متناسب بودن ضلع سوم آن‌ها را نتیجه بگیریم. برای این کار، نقطه‌ی C' را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC' = A'C'$. از C' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی B' قطع کند (شکل ۱۳). بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''} \quad (۲)$$

مقدار مساوی AC'' یعنی $A'C'$ را در (۲) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{AB''} \quad (۳)$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که

$$AB'' = A'B' \quad (۴)$$

بنابراین، دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند، پس سایر اجزای نظیر آنها نیز با هم برابرند، یعنی:

$$B''C'' = B'C' , \hat{B}' = \hat{B}'' , \hat{C}' = \hat{C}'' \quad (۵)$$

از طرفی چون پاره خط $B''C''$ با BC موازی است، پس:

$$\hat{C} = \hat{C}'' , \hat{B} = \hat{B}'' \quad (۶)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ ، یعنی سه زاویه‌ی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم مساویند.

با در نظر گرفتن $AC'' = A'C'$ ، $AB'' = A'B'$ و $B''C'' = B'C'$ ، رابطه‌ی (۲) را دوباره می‌نویسیم:

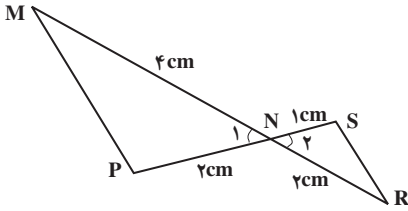
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (۷)$$

رابطه‌ی (۷) متناسب بودن ضلع‌های نظیر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را نشان می‌دهد، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

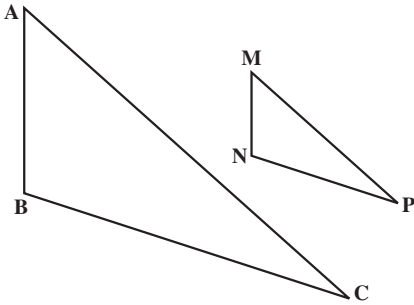
مثال ۶: در دو مثلث NPM و NSR

$$\frac{MN}{NR} = \frac{NP}{NS} = 2$$



شکل ۱۴

و چون زاویه‌های N_1 و N_2 متقابل به‌رأس هستند، در نتیجه $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$. بنابراین، دو مثلث NSR و NPM در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آن‌ها، متشابه‌اند.



شکل ۱۵

۳-۴-۳ — تشابه دو مثلث در حالت

متناسب بودن سه ضلع: تشابه دو مثلث را از متناسب بودن سه ضلع آن‌ها نیز می‌توان نتیجه گرفت. یعنی اگر در دو مثلث ABC و MNP

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث متشابه‌اند.

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

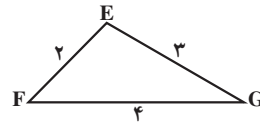
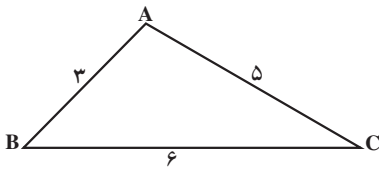
تمرین ۱: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، هرگاه سه ضلع از مثلثی، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۱۵).

راهنمایی: به اندازه‌ی MN روی AB جدا کرده آن را B' بنامید و به اندازه‌ی MP روی AC جدا کنید و آن را C' بنامید. سپس $B'C'$ را رسم کرده، با استفاده از عکس قضیه‌ی تالس نتیجه را به‌دست آورید.

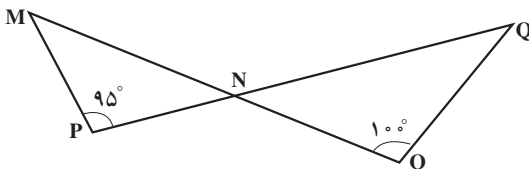
تمرین ۲: نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

مسائل

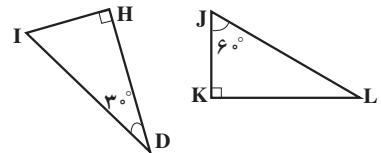
۱. در کدامیک از موارد زیر دو مثلث متشابه‌اند؟



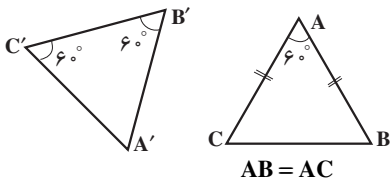
(الف)



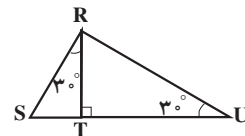
(ب)



(ب)

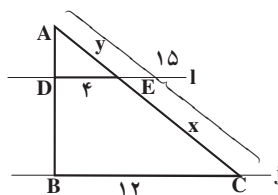


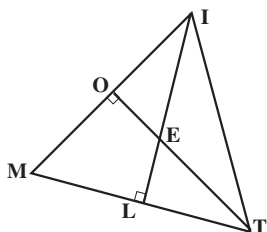
(ث)



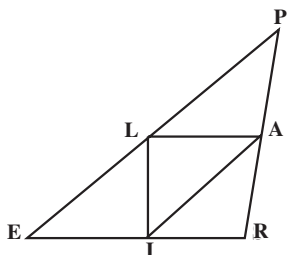
(ت)

۲. در شکل زیر، خط l با خط j موازی است. طول‌های x و y را بیابید.





۳. در شکل روبه‌رو، IL و TO ، ارتفاع‌های مثلث MIT هستند. چرا دو مثلث IOE و ELT متشابه هستند؟



۴. در شکل روبه‌رو، نقاط A ، L و I به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های PR ، PE و ER هستند. چرا دو مثلث ALI و PRE متشابه‌اند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

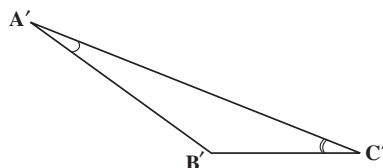
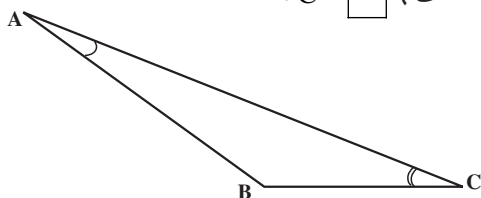
۵. اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، در هریک از عبارت‌های زیر، جای خالی را پر کنید:

ب) $\hat{B} = \square$ ؛

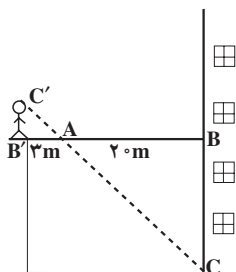
الف) $\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{\square}$ ؛

ت) $\hat{C} = \square$.

پ) $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'A'}{\square}$ ؛



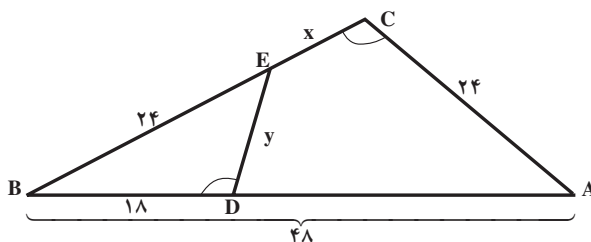
۶. دو قسمت مختلف یک بیمارستان به وسیله‌ی یک پل هوایی به هم مرتبط شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل در یک انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین سطح زمین و ساختمان قرار داد.



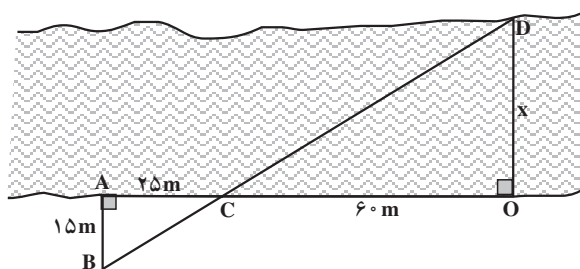
الف) چرا دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند؟

ب) با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل و طول قد محسن که $\frac{1}{8}$ متر می‌باشد، ارتفاع پل یعنی اندازه‌ی BC را به دست آورید.

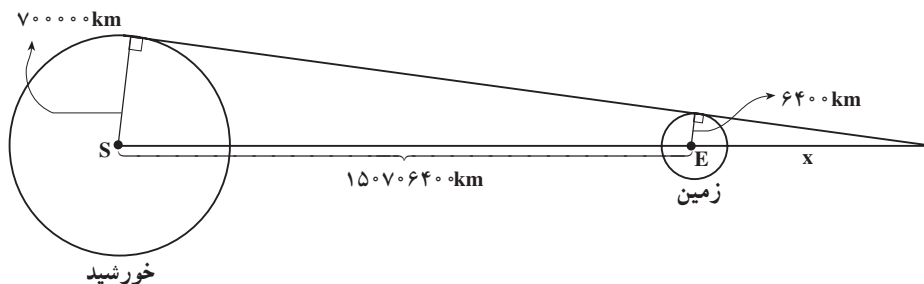
۷. در شکل زیر، $\hat{C} = \hat{BDE}$. طول x و y را پیدا کنید.



۸. شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبه‌ی عرض رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.



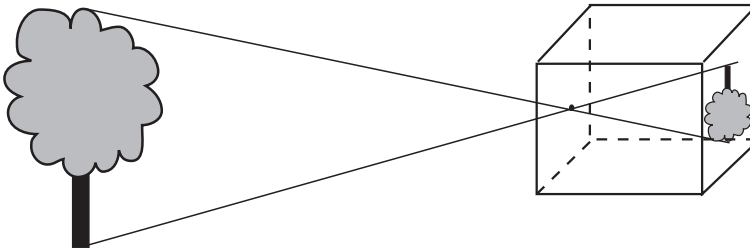
۹. در شکل زیر، شعاع‌های تقریبی زمین و خورشید و فاصله‌ی تقریبی مرکز زمین از مرکز خورشید داده شده است. به کمک یک ماشین حساب، طول تقریبی سایه‌ی زمین (x) را حساب کنید.



۱- اندازه‌های AB و AB' تقریبی هستند.

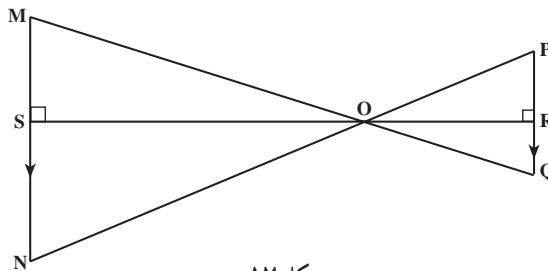
۳-۵- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه

با ایجاد سوراخی در مرکز دیواره‌ی یک جعبه‌ی مکعب شکل و قراردادن یک کاغذ مات در درون جعبه درست روبه‌روی سوراخ، می‌توان آن‌را به یک دوربین عکاسی ساده به نام جعبه‌ی تاریک تبدیل نمود^۱.



شکل ۱۶

همان‌طور که در شکل ۱۶ می‌بینید، تصویری که از یک شیء در جعبه‌ی تاریک بر روی صفحه‌ی مات ایجاد می‌شود وارونه است. پرتوهای نور که از شیء می‌تابند و از سوراخ جعبه عبور می‌نمایند، دو مثلث ایجاد می‌کنند که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. طول تصویری که در جعبه‌ی تاریک ایجاد می‌گردد با فاصله‌ی شیء از سوراخ متناسب است. این فاصله، ارتفاع OS از مثلث OMN است.



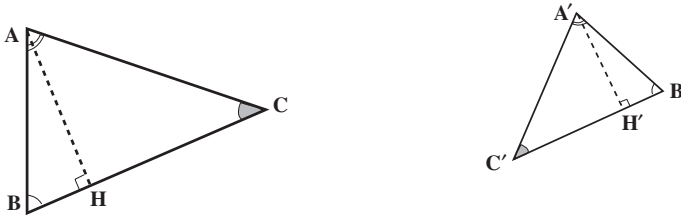
شکل ۱۷

فاصله‌ی سوراخ تا صفحه‌ی مات نیز ارتفاع OR از مثلث OPQ است. اگر دو ارتفاع OS و OR و نیز طول تصویر را بدانیم، آیا می‌توانیم طول شیء را به دست آوریم؟

۱- برای آشنایی بیشتر با طرز کار جعبه‌ی تاریک به کتاب آزمایشگاه فیزیک ۱ مراجعه نمایید.

فعالیت ۲-۳

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$. پاره خط‌های AH و $A'H'$ به ترتیب ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های BC و $B'C'$ هستند.



شکل ۱۸

۱. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بنویسید.
۲. چرا دو مثلث AHC و $A'H'C'$ متشابه هستند؟
۳. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث AHC و $A'H'C'$ را بنویسید.
۴. از مقایسه‌ی ۱ و ۳ نتیجه می‌گیریم:

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است، یعنی:

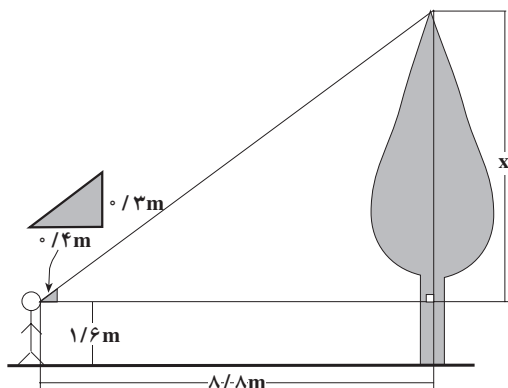
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$$

۵. چرا دو مثلث MNO و QPO در شکل ۱۷ متشابه‌اند؟ دلیل آن را توضیح دهید.
۶. نتیجه‌ی به‌دست آمده در قسمت ۴ را برای دو مثلث متشابه MNO و QPO بنویسید (شکل ۱۷).

۷. اگر OS یعنی فاصله‌ی درخت تا سوراخ جعبه ۲۲ متر، OR فاصله‌ی تصویر درخت تا سوراخ ۲/۰ متر و PQ طول تصویر درخت ۱/۰ متر باشد، طول درخت را پیدا کنید.

مثال ۷: مریم برای پیدا کردن ارتفاع درخت مقابل خانه‌ی خودشان، یک تکه مقوا به شکل

مثلث قائم الزاویه با اندازه‌ی اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی 3° و 4° متر ساخت. اگر او در فاصله‌ی $8/8$ متر از درخت بایستد می‌تواند، با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث، نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی چشم او از زمین $1/6$ متر است. مریم برای به‌دست آوردن ارتفاع تقریبی درخت به این صورت عمل کرد:



حل: دو مثلث قائم الزاویه در یک زاویه‌ی حادّه با هم مشترک هستند، پس با هم متشابه‌اند. در نتیجه ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم متناسب‌اند. در نتیجه:

$$\frac{8/8}{3^\circ} = \frac{x}{4^\circ}$$

و

$$x = \frac{3^\circ \times 8/8}{4^\circ}$$

$$x = 6/6 \text{ m}$$

اما چون فاصله‌ی چشم مریم از زمین $1/6$ متر است، پس

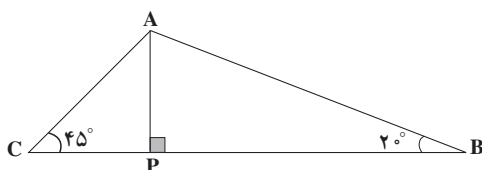
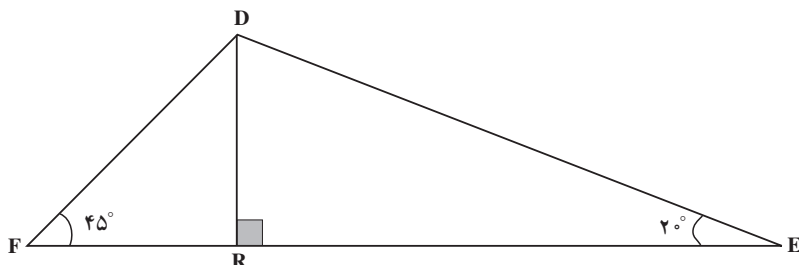
$$\text{ارتفاع درخت} = 6/6 + 1/6$$

$$\text{ارتفاع درخت} = 8/2 \text{ m}$$

با استفاده از روش بالا می‌توان ارتفاع بلندی‌های مختلف از جمله برج میدان آزادی تهران را اندازه گرفت.

مسائل

۱. در شکل زیر:



الف) اگر $DF = 6\sqrt{2}$ ، $DR = 6$ و $AP = 2$ ، طول AC را بیابید.

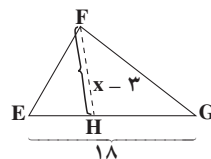
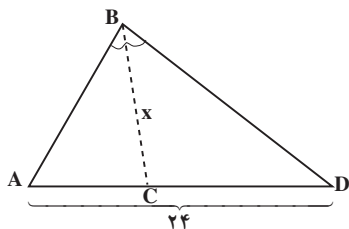
ب) اگر $BC = 15$ ، $EF = 21$ و $AP = 4$ ، طول DR چقدر است؟

۲. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت نیمسازهای نظیر در آنها برابر است با نسبت

تشابه دو مثلث.

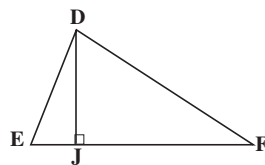
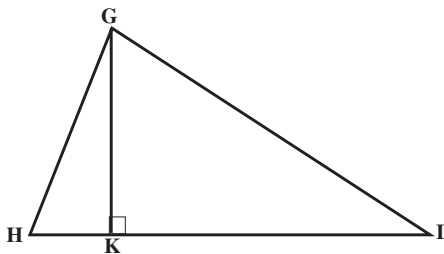
۳. در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه‌ی B و FH نیمساز زاویه‌ی F

یعنی F است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.



۴. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۵. در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK = \frac{3}{4}DJ$. اگر $HI = 20$ طول EF را حساب کنید.

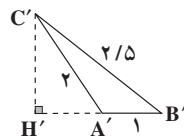
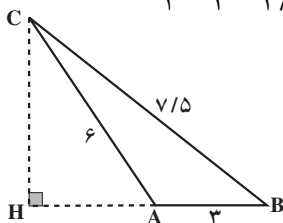


۳-۶- محیط و مساحت شکل‌های متشابه

نقشه‌ها تصویرهای مشابهی از وضعیت واقعی را نشان می‌دهند. در کنار هر نقشه معمولاً مقیاس آن نوشته می‌شود. برای مثال، اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{50,000}$ باشد، یعنی طول فاصله‌ها روی نقشه، $50,000$ بار کوچک‌تر از فاصله‌ی واقعی است. به کمک مقیاس داده شده می‌توان اطلاعاتی از قبیل مساحت یک استان کشور، محیط یا طول خط مرزی یک استان، یا فاصله‌ی بین دو شهر را اندازه‌گیری کرد. چون نقشه با شکل واقعی کشور متشابه و مقیاس داده شده برای نقشه همان نسبت تشابه است، دانستن نسبت محیط‌ها و مساحت‌های شکل‌های متشابه برحسب نسبت تشابه اهمیت پیدا می‌کند.

مثال ۸: در شکل ۱۹ دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه هستند، زیرا ضلع‌های نظیر آن‌ها متناسبند. نسبت تشابه برابر است با

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{7/5}{2/5} = 3$$



شکل ۱۹

محیط مثلث ABC ، یعنی مجموع طول‌های ضلع‌های آن

$$3+6+7/5=16/5$$

و محیط مثلث A'B'C'

$$1+2+2/5=5/5$$

است. چون $3 = \frac{16/5}{5/5}$ ، بنابراین

$$\frac{\text{محیط مثلث ABC}}{\text{محیط مثلث A'B'C'}} = \frac{16/5}{5/5} = 3 = \text{نسبت تشابه}$$

پس در این دو مثلث، نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر برابر با نسبت تشابه است.

مثال ۹: در شکل ۱۹، ارتفاع‌های CH از مثلث ABC و C'H' از مثلث A'B'C' را رسم می‌کنیم. طبق نتیجه‌ی فعالیت ۳-۲،

$$\frac{CH}{C'H'} = \text{نسبت تشابه} = 3 \quad (۱)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث ABC} &= \frac{1}{2} CH \times AB \\ &= \frac{1}{2} CH \times 3 \\ &= \frac{3}{2} CH \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث A'B'C'} &= \frac{1}{2} C'H' \times A'B' \\ &= \frac{1}{2} C'H' \times 1 = \frac{1}{2} C'H' \end{aligned}$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم که $CH = 3C'H'$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{3}{2} CH = \frac{9}{2} C'H'$$

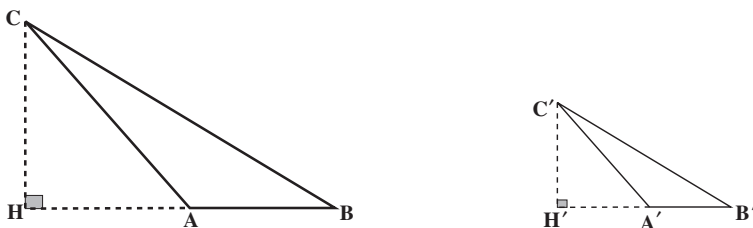
در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{\frac{9}{2} C'H'}{\frac{1}{2} C'H'}$$

$$= \frac{9}{1} = 9 = 3^2$$

پس در این دو مثلث، نسبت مساحت مثلث بزرگ تر به مساحت مثلث کوچک تر، توان دوم نسبت تشابه است. آیا دو نتیجه ی به دست آمده از این دو مثال، برای هر دو مثلث متشابه درست است؟ یعنی آیا اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط های آن ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تشابه است؟

در شکل ۲۰، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند. پس طبق تعریف تشابه



شکل ۲۰

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

محیط های این دو مثلث از جمع کردن طول های ضلع های آن ها به دست می آید. پس

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

و

$$\text{محیط مثلث } A'B'C' = A'B' + A'C' + B'C'$$

بنابر ویژگی ۴ تناسب ها،

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

یعنی :

در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

در دو مثلث ABC و A'B'C' ،

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} CH \times AB$$

$$\text{مساحت مثلث A'B'C'} = \frac{1}{2} C'H' \times A'B'$$

از طرفی

$$\frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \text{نسبت تشابه}$$

در نتیجه :

$$\begin{aligned} \frac{\text{مساحت مثلث ABC}}{\text{مساحت مثلث A'B'C'}} &= \frac{\frac{1}{2} CH \times AB}{\frac{1}{2} C'H' \times A'B'} \\ &= \frac{CH \times AB}{C'H' \times A'B'} \\ &= \left(\frac{CH}{C'H'}\right) \left(\frac{AB}{A'B'}\right) \\ &= \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 \end{aligned}$$

چون $\frac{AB}{A'B'}$ همان نسبت تشابه دو مثلث است. به این ترتیب،

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

مثال ۱۰: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، ۱۶ است. نسبت محیط‌های آن‌ها را به دست

آورید.

حل: اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد،

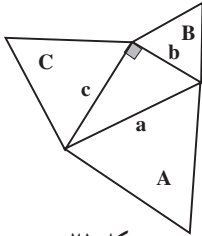
$$k^2 = \text{نسبت مساحت‌ها}$$

پس $k^2 = 16$ و در نتیجه $k = 4$. چون

نسبت تشابه = نسبت محیط‌ها

پس

$4 =$ نسبت محیط‌ها



شکل ۲۱

مثال ۱۱: مثلث قائم الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a ، b و c را در نظر بگیرید. آنگاه سه مثلث متساوی الاضلاع بر روی این سه ضلع بسازید (شکل ۲۱).

چه رابطه‌ای بین مساحت‌های سه مثلث متساوی الاضلاع A ، B و C وجود دارد؟

حل: چون مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ مجذور طول ضلع است، پس:

$$\text{مساحت } A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت } B = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

$$\text{مساحت } C = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

از طرف دیگر، در هر مثلث قائم الزاویه، رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است، پس:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

دو طرف رابطه‌ی بالا را در $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

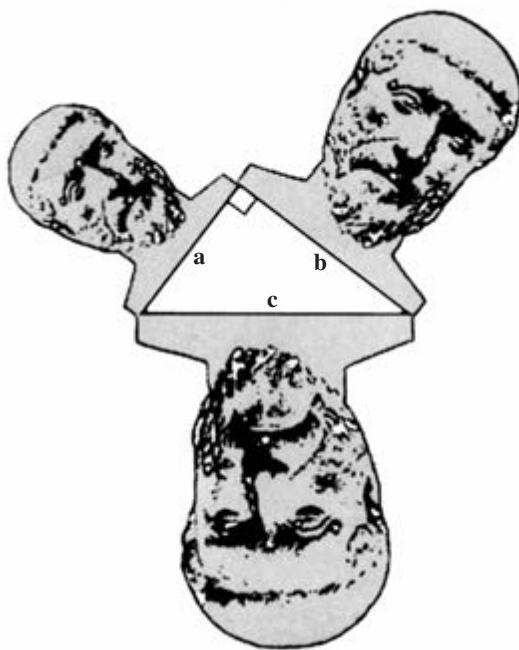
چون

$$\text{مساحت } A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ و } \text{مساحت } B = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \text{ و } \text{مساحت } C = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

$$\text{مساحت } C + \text{مساحت } B = \text{مساحت } A$$

بنابراین اگر به جای مربع‌هایی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساختیم، سه مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه بسازیم، باز هم همان رابطه بین مساحت‌ها برقرار است، یعنی مجموع مساحت‌های مثلث‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه برابر با مساحت مثلث ساخته شده روی وتر است.

آیا در مورد مساحت‌های هر سه شکل مشابهی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود، باز هم رابطه‌ی فوق برقرار است؟ به آن فکر کنید!



شکل ۲۲

مجله‌ی ریاضی

در دو مثلث متشابه، نسبت اجزای^۱ متناظر مانند ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است. این مطلب در مورد هر دو شکل متشابه درست است. به طور کلی دو شکل را متشابه گویند هرگاه بین نقاط دو شکل، یک تناظر برقرار باشد و مثلثی که با هر سه نقطه از یک شکل ساخته می‌شود، با مثلثی که با سه نقطه‌ی متناظر از شکل دیگر ساخته می‌شود، متشابه باشد.^۲ برای مثال، می‌توان دو چند ضلعی متشابه را به مثلث‌های متشابه تقسیم کرد و نتایج مربوط به مثلث‌های متشابه را برای آن‌ها به کار برد. بنابراین، در دو شکل متشابه، نسبت تمام اجزای آن مقدار ثابتی است که برابر با نسبت تشابه است. در نتیجه، نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

برای مثال، چون هر دو دایره با هم متشابه‌اند، می‌توان مساحت دایره O به شعاع r را به وسیله‌ی دایره‌ی O' به شعاع واحد محاسبه کرد:

$$\frac{\text{مساحت دایره‌ی } O}{\text{مساحت دایره‌ی } O'} = (\text{نسبت تشابه})^2 = \left(\frac{r}{1}\right)^2 = r^2$$

و چون مساحت دایره‌ی واحد برابر π است،

$$\pi r^2 = \text{مساحت دایره به شعاع } r$$

با همین استدلال، در شکل ۲۲ (تصویر فیثاغورس) چون هر سه شکل متشابه‌اند (دلیل آن را توضیح دهید) پس:

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad (۱)$$

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad (۲)$$

۱- اجزای مورد نظر شامل زاویه‌ها نمی‌باشد.

۲- در این تعریف، منظور از شکل، مجموعه نقاطی از صفحه است که بر یک خط قرار ندارند.

از طرفی، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۲۲،

$$c^2 = a^2 + b^2$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را بر c^2 تقسیم می‌کنیم؛

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

یا

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad (3)$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را در (۳) جایگزین می‌کنیم:

$$1 = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} + \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

از رابطه‌ی فوق مخرج مشترک می‌گیریم:

$$1 = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a + \text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

طبق خاصیت تناسب، حاصل ضرب جمله‌های کناری برابر با حاصل ضرب جمله‌های میانی است. در نتیجه؛

$$\text{مساحت شکل روی ضلع } b + \text{مساحت شکل روی ضلع } a = \text{مساحت شکل روی ضلع } c$$

مسائل

۱. اگر ضلع‌های کوچک‌تر دو مثلث متشابه ۵ و ۶ سانتی‌متر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.

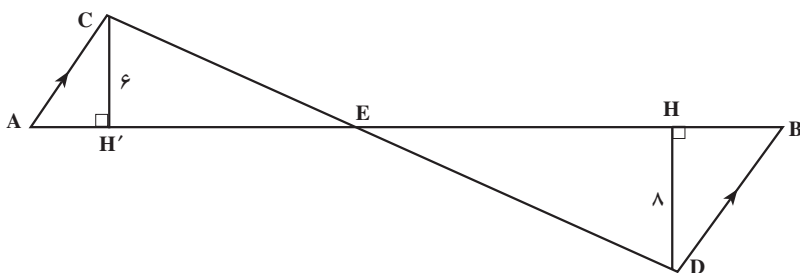
۲. مساحت‌های دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. نسبت اضلاع متناظر را به دست آورید.

۳. در دو مثلث متشابه مساحت یکی ۱۱ برابر دیگری است. اگر طول یک ضلع از مثلث کوچک‌تر ۷ سانتی‌متر باشد، طول ضلع متناظر در مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

۴. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{81}{121}$ است. نسبت محیط‌ها را پیدا کنید.

۵. محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر، 50° سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

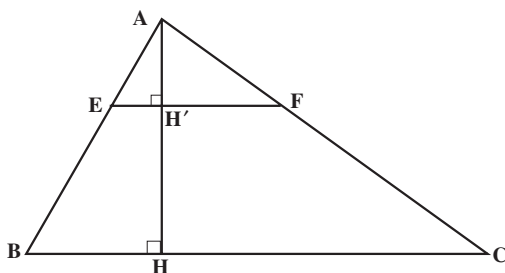
۶. با توجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = 35$ ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نسبت مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDE را بیابید.

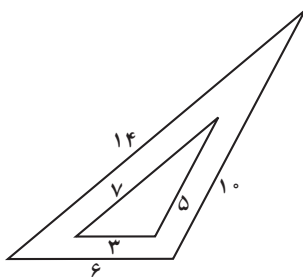
ب) مساحت مثلث BDE را به دست آورید.

۷. در شکل زیر، $EF \parallel BC$. اگر نسبت مساحت‌های مثلث‌های AEF و ABC برابر $\frac{1}{9}$ باشد، نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.

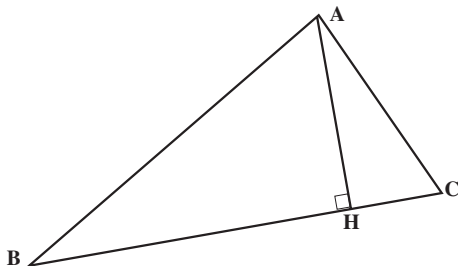


۸. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر 60° سانتی‌متر باشد، طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

۹. طول ضلع‌های مثلث ABC، ۷، ۹ و ۱۴ سانتی متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۲۱ سانتی متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.
۱۰. در شکل زیر نسبت مساحت‌ها را بیابید.



۱۱. در شکل زیر زاویه‌ی BAC قائمه است و AH ارتفاع نظیر وتر می‌باشد مراحل زیر را در نظر بگیرید.



۱. مساحت مثلث ACH + مساحت مثلث ABH = مساحت مثلث ABC

۲. $1 = \frac{\text{مساحت مثلث ABH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} + \frac{\text{مساحت مثلث ACH}}{\text{مساحت مثلث ABC}}$

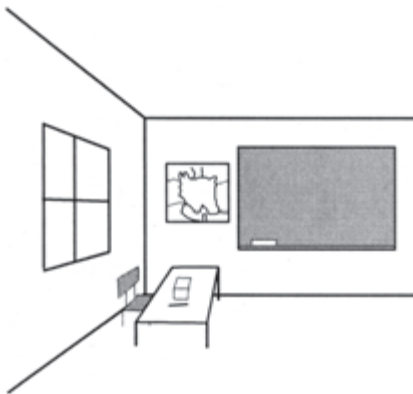
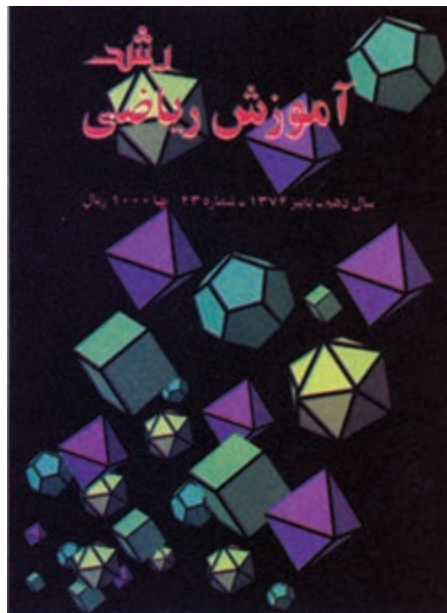
۳. مثلث‌های ABC و ABH و ACH متشابه‌اند.

۴. $1 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

۵. $BC^2 = AB^2 + AC^2$

- الف) دلیل درستی هر مرحله را توضیح دهید.
- ب) آیا پنج مرحله بالا اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس است؟ (چرا؟).

شکل‌های فضایی

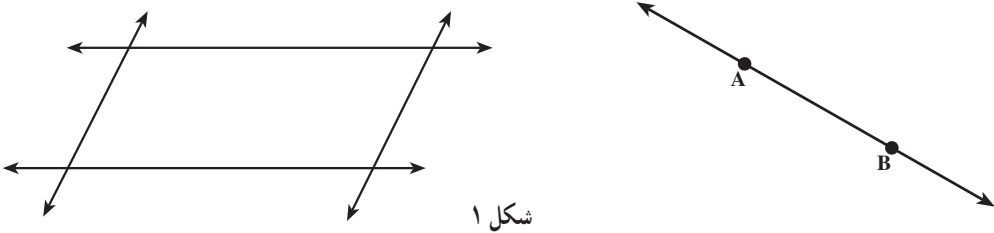


ما در فضای سه بُعدی زندگی می‌کنیم و اشیای اطراف ما، سه بُعدی هستند. کلاس درس یا اتاق منزلی که در آن زندگی می‌کنیم نمودهایی از فضای سه بُعدی هستند. میز و صندلی درون کلاس هم اشیای سه بُعدی می‌باشند.

در این فصل می‌خواهیم درباره‌ی بعضی از شکل‌های فضایی صحبت کنیم و ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها را بشناسیم.

۴-۱- خط و صفحه در فضا

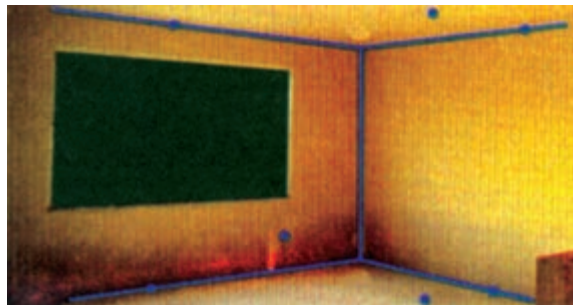
کلاس درس نمودی از فضای سه‌بُعدی است. سقف^۱ و کف کلاس و هر کدام از دیوارهای آن نشان‌دهنده‌ی یک صفحه هستند. محل‌های تلاقی دیوارهای کلاس و کف آن یک خط در فضا تشکیل می‌دهند. صفحه‌ی کتاب یا دفترچه‌ای که روی آن می‌نویسید نیز نشان‌دهنده‌ی یک صفحه در فضا است و لبه‌های کتاب، خط‌هایی در صفحه هستند. همان‌طور که خط در فضا از دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از همه طرف در فضا نامحدود است.



دیوارهای کلاس یا صفحه‌ی کتاب بخش‌هایی از صفحه در فضا هستند. معمولاً یک صفحه را با متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهیم.

دو خط در یک صفحه موازی نامیده می‌شوند اگر هیچ نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.

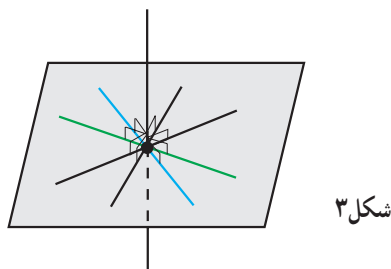
بار دیگر به کلاس درس خود نگاه کنید. لبه‌ی بالایی تخته سیاه یک خط در فضا است. اگر این خط را ادامه دهیم، سقف کلاس را قطع نمی‌کند. در این وضعیت می‌گوییم لبه‌ی بالایی تخته سیاه با سقف کلاس موازی است.



۱- سقف کلاس‌ها در همه‌ی مناطق ایران نشان‌دهنده‌ی یک صفحه نمی‌باشند. به عنوان مثال، سقف‌های گنبدی شکل مناطق کویری و سقف‌های بعضی مناطق شمال ایران به صورت یک صفحه نیستند.

یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند متقاطع
گوییم. در غیر این صورت خط و صفحه موازیند.

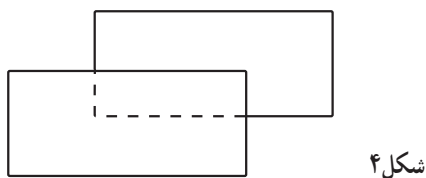
حالا به خط قائم گوشه‌ی کلاس نگاه کنید. این خط بر کف کلاس عمود است. خطی که یک
صفحه را قطع می‌کند با خط‌هایی که درون صفحه قرار دارند و از نقطه‌ی تلاقی آن خط با صفحه
می‌گذرند، زاویه تشکیل می‌دهد.



یک خط را بر یک صفحه عمود گوییم، اگر صفحه را قطع کند و با هر خطی در
صفحه که از نقطه‌ی تلاقی می‌گذرد زاویه‌ی قائمه تشکیل دهد.

نکته: می‌توان نشان داد که در تعریف فوق عمود بودن خط بر حداقل دو خط متقاطع در
صفحه کافی است.

دو دیوار روبه‌روی هم در کلاس، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی بخش‌هایی از دو صفحه‌ی
موازی هستند (شکل ۴).



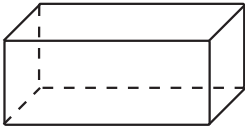
دو صفحه را موازی گویند، اگر یکدیگر را قطع نکنند یا بر هم منطبق باشند.

از طرف دیگر هریک از دیوارهای کلاس درس بر کف کلاس عمود است.

دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود
داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

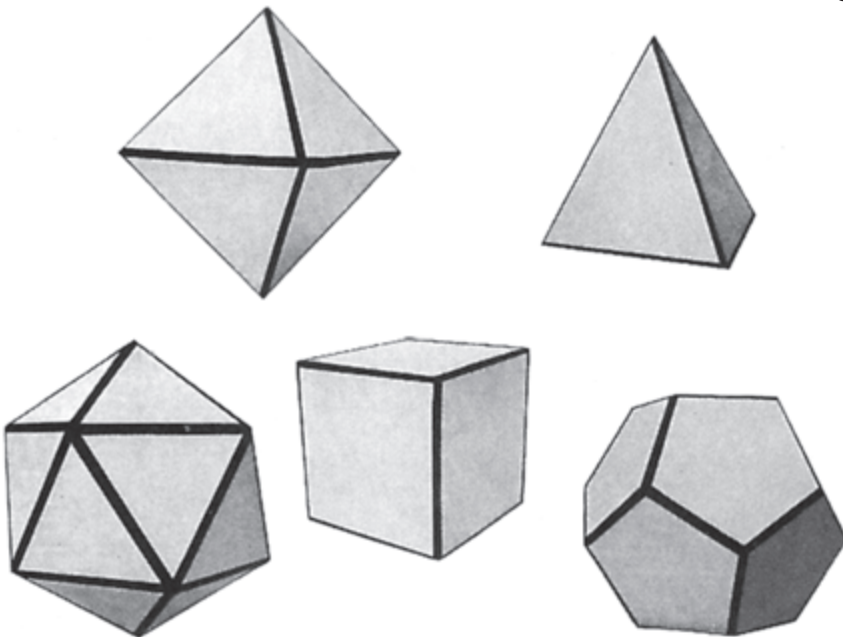


۴-۲- مکعب مستطیل



شکل ۵

به شکل ۵ نگاه کنید. این شکل یک مکعب مستطیل است. در زندگی روزانه با اشیای بسیاری سروکار داریم که به شکل مکعب مستطیل هستند. جعبه‌ی خمیردندان، جعبه‌ی دستمال کاغذی، قوطی کبریت و بعضی از مدادپاکن‌ها نمونه‌هایی از مکعب مستطیل هستند. مکعب مستطیل شکل خاصی از چندوجهی است (شکل ۶).

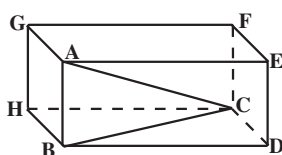


شکل ۶

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.

بخش‌هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هر کدام از این چندضلعی‌ها یک وجه، ضلع‌های این وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های این وجه‌ها، رأس‌های چندوجهی نامیده می‌شوند.

مکعب مستطیل یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل شکل هستند.



شکل ۷

وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند (شکل ۷). مکعب مستطیل، ۸ رأس و ۱۲ یال دارد.

در مکعب مستطیل به دو رأس مانند A و C در شکل ۷ که در یک وجه قرار ندارند، رأس‌های متقابل گفته می‌شود.

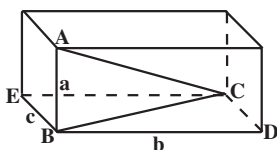
الف) در شکل ۷، A، B و C سه رأس مکعب مستطیل هستند. رأس‌های دیگر را نام ببرید.

ب) AB و CD دو یال این مکعب مستطیل هستند. یال‌های دیگر را نام ببرید.

پ) پاره خط AC، دو رأس متقابل A و C را به هم وصل کرده است. رأس‌های متقابل دیگر را نام ببرید.

در هر مکعب مستطیل، پاره خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود.

فرض کنید طول یال‌های AB، BD و BE به ترتیب a ، b و c باشد (شکل ۸). می‌خواهیم طول قطر AC را پیدا کنیم. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC وتر آن است. پس با محاسبه‌ی طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، طول AC یعنی قطر مکعب مستطیل به دست می‌آید.



شکل ۸

۱- در این جا منظور از چندضلعی، سطح چندضلعی است.

طول ضلع AB از مثلث ABC برابر a است ولی طول ضلع دیگر یعنی BC داده نشده است. اما چون مکعب مستطیل از وجه‌های مستطیل شکل تشکیل یافته است، پس $BE = CD = c$. مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است. پس می‌توانیم از رابطه‌ی فیثاغورس طول BC را بیابیم:

$$BC^2 = b^2 + c^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{بنابراین:}$$

$$= a^2 + (b^2 + c^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

در نتیجه:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (۱)$$

مثال ۱: طول یال‌های AB، BD و BE در مکعب مستطیل شکل ۸، به ترتیب ۱، ۲ و ۳ سانتی متر است. طول قطر AC را محاسبه کنید.

حل: با قراردادن $a=1$ ، $b=2$ و $c=3$ در رابطه‌ی (۱) طول AC را به دست می‌آوریم

$$AC = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

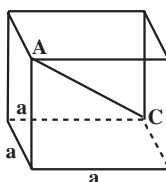
مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، مکعب نامیده می‌شود.

مثال ۲: اگر طول یال‌های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن را پیدا کنید.

حل: چون طول یال‌ها برابر a است، پس در رابطه‌ی (۱) به جای a ، b و c مقدار a را قرار

می‌دهیم.

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



شکل ۹

مثال ۳: اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می کند؟

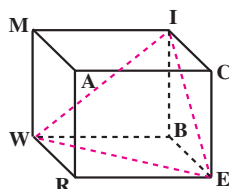
حل: اگر طول یال های مکعب شکل ۹ را دو برابر کنیم، آنگاه طول یال مکعب جدید، $2 \times a = 2a$ خواهد بود. اگر قطر مکعب جدید را $A'C'$ بنامیم، به کمک رابطه ی (۱) طول آن را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} A'C' &= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{3 \times 4a^2} \\ &= 2a\sqrt{3} \\ &= 2AC \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن نیز دو برابر می شود.

فعالیت ۴-۱

الف) به مکعب شکل ۱۰ نگاه کنید. این شکل را در دفتر خود رسم کنید.



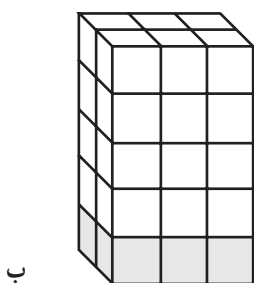
شکل ۱۰

۱. در این مکعب رأس متقابل رأس I را نام ببرید.
 ۲. کدام یک از یال های این مکعب با یال MA موازی هستند؟
 ۳. این مکعب چند قطر دارد؟ آن ها را رسم کنید و نام ببرید.
 - ب) حال پاره خط های IE، WI و WE را نیز به شکلی که در دفتر خود رسم کرده اید اضافه کنید.
 ۴. اندازه ی زاویه های IWB و BWE را به دست آورید.
 ۵. اندازه ی زاویه IWE را به دست آورید.
 ۶. آیا رابطه ی $\widehat{IWE} = \widehat{IWB} + \widehat{BWE}$ برقرار است؟ چرا؟
 ۷. اگر طول یال این مکعب ۸ سانتی متر باشد، طول پاره خط WI را حساب کنید.
- در شکل ۱۰، WI، قطر وجه نامیده می شود.

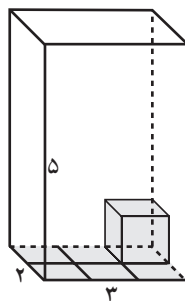
آیا هنگام نوشیدن آب داخل یک لیوان، از خود پرسیده‌اید مقدار آبی که درون لیوان جای می‌گیرد چقدر است؟ یا هنگامی که بادکنکی را باد می‌کنید از خود پرسیده‌اید چه اندازه هوا داخل بادکنک جای می‌گیرد؟ یا گنجایش مخزن سوخت اتومبیل چقدر است؟

برای اندازه‌گیری طول یک پاره خط واحد طولی مثل سانتی‌متر، یا میلی‌متر انتخاب کردیم و با انتخاب آن واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت مثل سانتی‌متر مربع یا میلی‌متر مربع به‌دست آوردیم. برای محاسبه‌ی حجم یک شکل فضایی نیز محتاج یک واحد هستیم. این واحد، حجم مکعبی با طول یال واحد است که برابر یک سانتی‌متر مکعب یا یک میلی‌متر مکعب (برحسب واحدی که برای اندازه‌گیری طول یال آن انتخاب می‌کنیم) در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل آن‌را با مربعهای واحد پوشانیدیم، برای محاسبه‌ی حجم یک مکعب مستطیل آن‌را با مکعب‌های واحد (مکعب‌هایی با طول یال واحد) پر می‌کنیم و با شمارش تعداد آن‌ها یا کسری از آن‌ها، حجم مکعب مستطیل را می‌یابیم. مکعب مستطیل شکل ۱۱-الف دارای یال‌هایی به طول‌های ۳ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر است، که آن‌ها را طول، عرض و ارتفاع آن می‌نامند. این مکعب مستطیل را مانند شکل ۱۱-ب با مکعب‌های واحد پر می‌کنیم. چون ارتفاع مکعب مستطیل ۵ است، ۵ ردیف از مکعب‌های واحد آن‌را پر می‌کنند. در هر ردیف نیز ۶ مکعب وجود دارد زیرا وجه پایینی این مکعب مستطیل، مستطیلی با طول ۳ سانتی‌متر و عرض ۲ سانتی‌متر است و مساحت مستطیل $2 \times 3 = 6$ سانتی‌متر مربع است، بنابراین در هر ردیف ۶ مکعب واحد لازم خواهد بود. در نتیجه:

$$2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 30$$



ب



الف

شکل ۱۱

مکعب واحد برای پر کردن کل فضای داخل مکعب مستطیل لازم است. از این رو حجم این مکعب مستطیل 30 سانتی‌متر مکعب است.

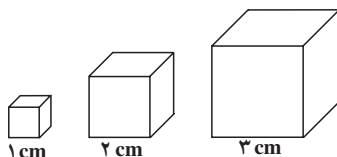
$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

طول و عرض مکعب مستطیل در واقع طول و عرض مستطیل وجه پایینی آن هستند که قاعده‌ی مکعب مستطیل نامیده می‌شود. چون مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول و عرض است، در نتیجه:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

فعالیت ۲-۴

سه مکعب به طول یال‌های ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر مطابق شکل ۱۲ در نظر بگیرید.



شکل ۱۲

۱. مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های مکعب را به دست آورید و آن را مساحت کل بنامید.
 ۲. اگر طول یال یک مکعب را دو برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
 ۳. اگر طول یال مکعبی را سه برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
 ۴. حجم هر کدام از این مکعب‌ها را حساب کنید.
 ۵. اگر طول یال مکعبی دو برابر یا سه برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟
- مثال ۴:** حجم مکعبی به طول یال a را پیدا کنید.

حل: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، در نتیجه:

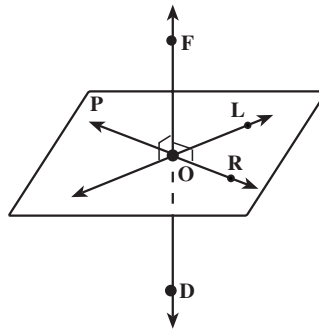
$$a^3 = (\text{طول یال})^3 = \text{حجم مکعب}$$

مسائل

۱. نمایی از خط‌ها و صفحه‌هایی که در کلاس درس یا اتاق منزل خود می‌بینید در دفترچه خود رسم و خط‌های عمود بر صفحه‌ها را نام‌گذاری کنید. آنگاه، همه‌ی زاویه‌های قائمه‌ای را که تشکیل می‌شوند نام ببرید.

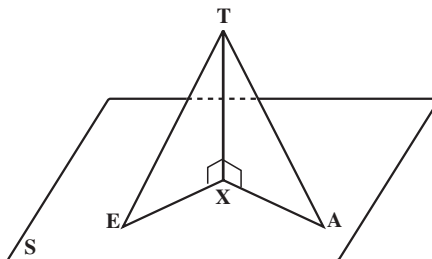
۲. در شکل زیر خط FD بر صفحه‌ی P عمود است و خط‌های OL و OR درون صفحه

هستند :



الف) از عمود بودن خط بر صفحه، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟
ب) زاویه‌هایی را که قائمه هستند نام ببرید.

۳. در شکل زیر، پاره خط TX بر صفحه‌ی S عمود است و $TE = TA$. چرا زاویه‌ی TEX با زاویه‌ی TAX مساوی است؟



۴. حجم مکعب مستطیلی را که طول، عرض و ارتفاع آن $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ سانتی متر است به دست آورید.

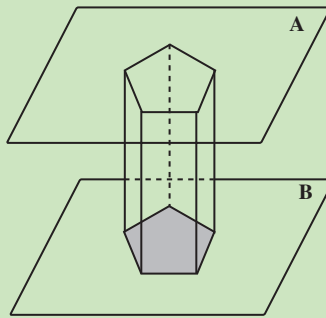
۵. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{6}$ باشد، مساحت کل آن را حساب کنید.

۴-۳- منشور و استوانه

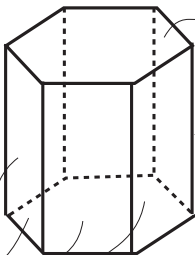
به تصویر زیر نگاه کنید. این تصویر، نمونه‌هایی از یک منشور است.



منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



شکل ۱۳



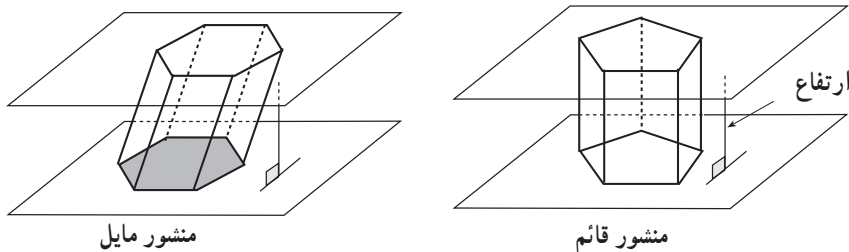
وجه‌های جانبی

شکل ۱۴

دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و پال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند، پال‌های جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم

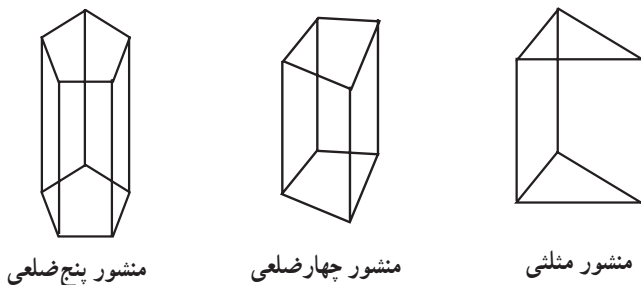
موازنند. (شکل ۱۴) ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند آن را منشور مایل می‌نامند (شکل ۱۵).

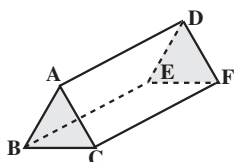


شکل ۱۵

منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. مثلاً اگر قاعده‌ی یک منشور مثلث باشد، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب، مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است. (چرا؟)



شکل ۱۶



شکل ۱۷

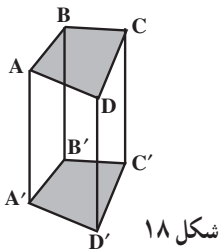
فیزیکدان‌ها معمولاً به قطعه‌ی شیشه‌ای مثلث شکلی که می‌تواند نور را به طیف‌های آن تجزیه کند، منشور می‌گویند. این قطعه شیشه یک منشور مثلثی قائم است (شکل ۱۷).
تمرین ۱: شکل ۱۷ یک منشور مثلثی است.

الف) قاعده‌های این منشور را نام ببرید.

ب) این منشور چند وجه جانبی دارد؟ وجه‌های جانبی آن چه شکلی دارند؟

پ) یال‌های جانبی آن را نام ببرید.

تمرین ۲: در شکل ۱۸ یک منشور چهارضلعی قائم می‌بینید.



شکل ۱۸

الف) این منشور چند وجه دارد؟

ب) وجه‌های آن چه شکلی دارند؟

پ) یال‌هایی از این منشور را که موازیند، نام ببرید.

می‌توان مجموع مساحت وجه‌ها را برای هر منشور دلخواه نیز مانند مساحت کل مکعب

مستطیل به‌دست آورد.

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور، مساحت کل آن نامیده می‌شود.

فعالیت ۳-۴

طول ضلع‌های قاعده‌ی منشور شکل ۱۹، به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد و طول یال‌های جانبی

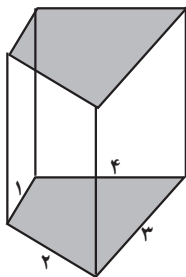
آن ۶ واحد است.

۱. مساحت هریک از وجه‌های جانبی این منشور را به‌دست آورید.

۲. مساحت جانبی منشور چقدر است؟

۳. محیط قاعده را به‌دست آورید و آن را در طول یال جانبی ضرب کنید.

۴. از مقایسه‌ی پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



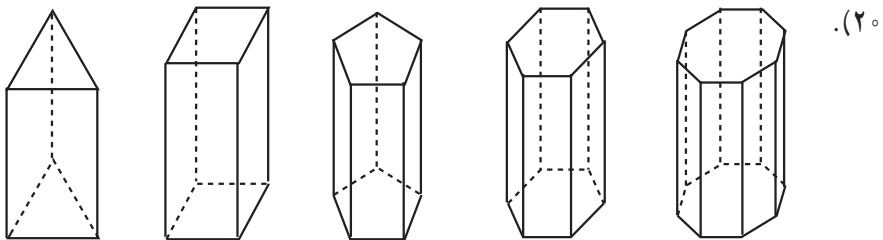
شکل ۱۹

۵. اگر طول یال جانبی یک منشور قائم h و محیط قاعده‌ی آن p باشد برای محاسبه مساحت جانبی منشور چه فرمولی پیشنهاد می‌کنید؟

۶. اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a ، b و c باشند، به کمک نتیجه‌ی سؤال ۵، فرمولی برای پیدا کردن مساحت جانبی مکعب مستطیل به دست آورید.

۷. مساحت کل مکعب مستطیل سؤال ۶، برحسب a ، b و c چقدر است؟

یک دسته از منشورهای جالب آن‌هایی هستند که قاعده‌ی آن‌ها چندضلعی منتظم است (شکل



شکل ۲۰

هرچه تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظم بیشتر می‌شود، قاعده‌ی منشور به دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی خیلی زیاد شود، هرکدام از وجه‌ها باریک و باریک‌تر می‌گردند تا تقریباً شبیه به یک خط می‌شوند و قاعده‌های منشور بیشتر و بیشتر شبیه دایره می‌شوند. در نتیجه منشور حاصل به یک شکل فضایی که قاعده‌ی آن دایره است تبدیل می‌شود. این شکل فضایی را استوانه می‌نامند.



شکل ۲۱

بسیاری از وسایلی که در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم، استوانه‌ای شکل هستند. بعضی از لیوان‌های آب‌خوری، پیستون موتور اتومبیل‌ها و لوله‌های آب همگی استوانه‌اند.

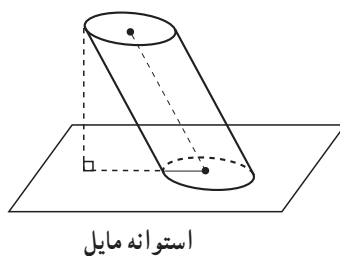
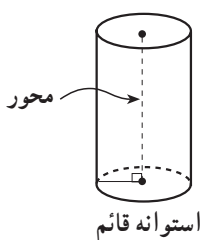


شکل ۲۲

آیا شما نیز می‌توانید چند شیء استوانه‌ای شکل را نام ببرید؟

استوانه^۱ شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی هم‌نهشت هستند.

اگر محور استوانه یعنی، پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این صورت آن را مایل می‌نامند (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

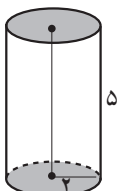
توجه: در استوانه قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است. همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی)^۲ که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده مساحت کل نامیده می‌شود.

۱- عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲- Surface (سطح - رویه)

فعالیت ۴-۴

طول محور یعنی طول ارتفاع استوانه قائم شکل ۲۴ برابر ۵ سانتی متر و شعاع قاعده‌ی آن ۲ سانتی متر است. قاعده‌های این استوانه را بردارید و از کنار، آن‌را به موازات محور برش داده و باز کنید، یک مستطیل به دست می‌آید.

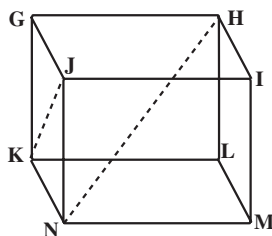


شکل ۲۴

۱. طول و عرض مستطیل حاصل چقدر است؟
۲. مساحت مستطیل را به دست آورید.
۳. مساحت این مستطیل چه رابطه‌ای با مساحت جانبی استوانه دارد؟
۴. با توجه به پاسخ سؤال ۳، مساحت جانبی استوانه چیست؟
۵. به همین روش، مساحت جانبی یک استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی r را به دست آورید.
۶. مساحت هریک از دایره‌های استوانه‌ی شکل ۲۴ چقدر است؟
۷. مساحت کل استوانه را حساب کنید.
۸. به کمک پاسخ سؤال‌های ۶ و ۷، مساحت کل استوانه‌ی سؤال ۵ را محاسبه کنید.

مسائل

۱. طول هر یال مکعب شکل زیر ۶ سانتی متر است.

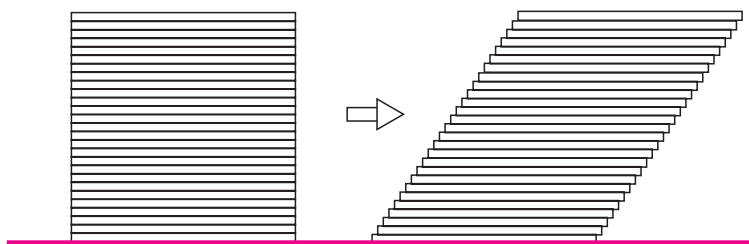


- الف) طول JK یعنی قطر وجه $GJNK$ چقدر است؟
- ب) طول قطر HN چقدر است؟
۲. طول قطر وجه یک مکعب ۱۰ سانتی متر است. مساحت کل آن را حساب کنید.
۳. اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۸ سانتی متر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتی متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۴. طول ضلع قاعده‌ی یک منشور قائم شش‌ضلعی منتظم 10° سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۸ سانتی‌متر است. مساحت جانبی و مساحت کل آن را پیدا کنید.
۵. چرا ارتفاع یک منشور مایل کوتاه‌تر از طول یال جانبی آن است؟

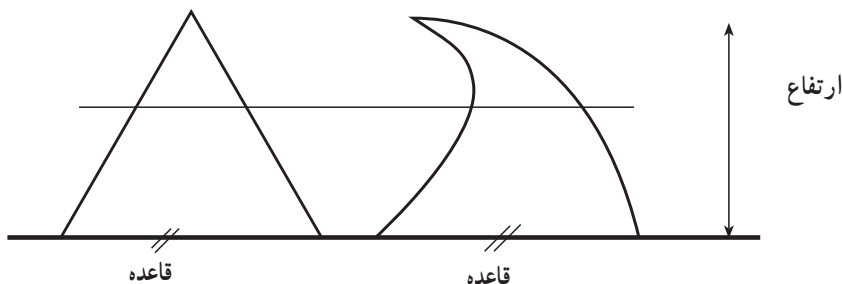
۴-۴- اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه

یک دسته کارت هم‌اندازه را روی یکدیگر قرار دهید و از پهلو به آن نگاه کنید. یک سطح مستطیل شکل ایجاد شده است. اگر این دسته کارت را به آرامی فشار دهید و مجدداً از پهلو به آن نگاه کنید، یک متوازی‌الاضلاع دیده می‌شود. این متوازی‌الاضلاع و مستطیل دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند در نتیجه مساحت آن‌ها مساوی است. قاعده‌های متوازی‌الاضلاع و مستطیل شکل ۲۵ بر روی یک خط قرار دارند. هر خطی که به موازات قاعده این دو شکل را قطع کند، در آن‌ها طول‌های مساوی ایجاد می‌کند.



شکل ۲۵

دو شکل زیر دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند و هر خطی موازی با قاعده‌ها، در دو شکل قطعه‌هایی با طول‌های مساوی به وجود می‌آورد.



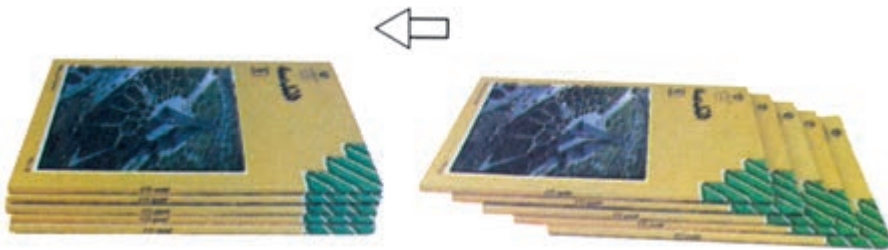
شکل ۲۶

طبق اصل کاوالیری^۱، چنین دو شکلی دارای مساحت‌های برابر هستند.

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

کتاب‌های هندسه‌ی خود و دوستانتان را طوری روی هم قرار دهید که مانند شکل ۲۷ یک منشور مستطیلی مایل ایجاد شود. کتاب‌ها را از کنار به آرامی با دست فشار دهید تا به صورت قائم روی یکدیگر قرار گیرند. با این کار، مساحت کتاب‌ها و ارتفاع منشور تغییر نمی‌کند ولی یک منشور مستطیلی قائم به دست می‌آید.



شکل ۲۷

اگر حجم منشور مایل را برابر مجموع حجم‌های این کتاب‌های هم‌اندازه بگیریم، نباید با فشاردادن کتاب‌ها و تبدیل منشور مایل به قائم، حجم آن تغییر کند. همچنین مساحت هرکدام از کتاب‌های فوق یعنی S^1 و ارتفاع منشور یعنی h نیز با فشاردادن تغییر نمی‌کنند. بنابراین،

$$S \times h = \text{حجم منشور مستطیلی مایل}$$

$$^3V = S \times h$$

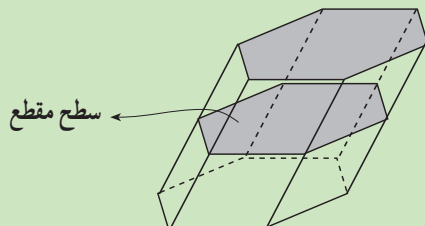
از تساوی حجم دو منشور قائم و مایل، به بیان اصل کاوالیری برای حجم‌های شکل‌های فضایی مانند آنچه برای مساحت‌های دو شکل مسطح بیان کردیم می‌پردازیم. اما قبل از آن، نیازمند تعریف زیر هستیم:

^۱ Cavalieri

^۲ Surface

^۳ Volume

سطح مقطع یک شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه حاصل می‌شود.



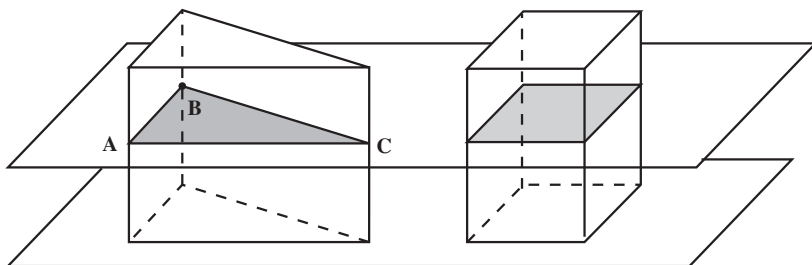
اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شوند برابر باشند، آنگاه نتیجه می‌گیریم که حجم‌های این دو منشور برابر هستند. این مطلب را نخستین بار، کاوالیری، ریاضیدان ایتالیایی قرن هفدهم، به صورت کلی‌تری بیان کرد.

اصل کاوالیری درباره‌ی حجم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر هستند.

طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم ارتفاع برابر باشند، حجم‌های آن‌ها برابر خواهند بود.

حجم منشور برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

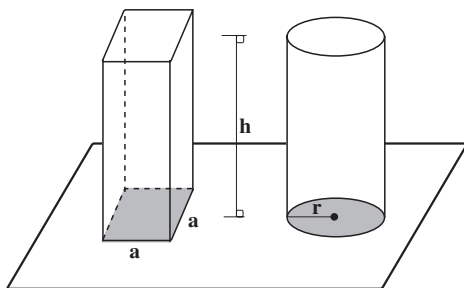


مثال ۵: در شکل صفحه‌ی قبل مساحت‌های مربع و مثلث که قاعده‌های دو منشور را تشکیل می‌دهند، همچنین ارتفاع دو منشور برابر هستند. هر صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی P یک منشور را در مربع و منشور دیگر را در یک مثلث قطع می‌کند که باز دارای مساحت‌های برابر هستند. پس بنابر اصل کاوالیری، حجم‌های این دو منشور برابرند. یکی از این منشورها یک مکعب مستطیل است و حجم آن برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. پس حجم منشور دیگر نیز برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن می‌باشد. در نتیجه، اگر h ارتفاع و S مساحت قاعده‌ی هر منشوری باشد، حجم آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = S \times h$$

فعالیت ۴-۵

در شکل ۲۸ استوانه‌ی قائمی که شعاع دایره‌ی قاعده‌ی آن r و ارتفاع آن h است و یک منشور چهارضلعی قائم به همان ارتفاع رسم شده است.

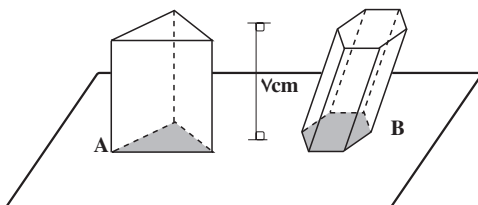


شکل ۲۸

۱. اگر مساحت قاعده‌های استوانه و منشور شکل ۲۸ برابر باشند، اندازه‌ی طول ضلع مربع یعنی a را بر حسب r به دست آورید.
۲. با مقداری که برای a در قسمت ۱ به دست آورده‌اید، حجم منشور را حساب کنید.
۳. با توجه به اصل کاوالیری، حجم استوانه‌ی قائم را به دست آورید.
۴. آیا حجم استوانه‌ی مایل نیز مانند حجم استوانه‌ی قائم به دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مسائل

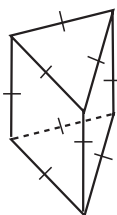
۱. با استفاده از اصل کواالیری نشان دهید دو مثلث با قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر، مساحت برابر دارند (از قانون مساحت مثلث استفاده نکنید).
(راهنمایی: از تشابه مثلث‌ها استفاده کنید.)
۲. در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه‌ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتی‌متر است.



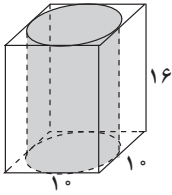
- الف) اگر مساحت قاعده‌ی منشور A، 10 سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن چقدر است؟
فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این دو منشور، سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد کند:

ب) حجم منشور B را به دست آورید.

۳. طول هر یال منشور قائم شکل روبه‌رو ۴ سانتی‌متر است.

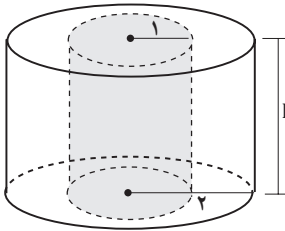


- الف) مساحت هر کدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.
ب) ارتفاع منشور چقدر است؟
پ) حجم منشور را به دست آورید.
۴. دو استوانه‌ی قائم یکی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده‌ی ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- الف) مساحت‌های جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
ب) حجم‌های این دو استوانه را پیدا کرده و با هم مقایسه کنید.



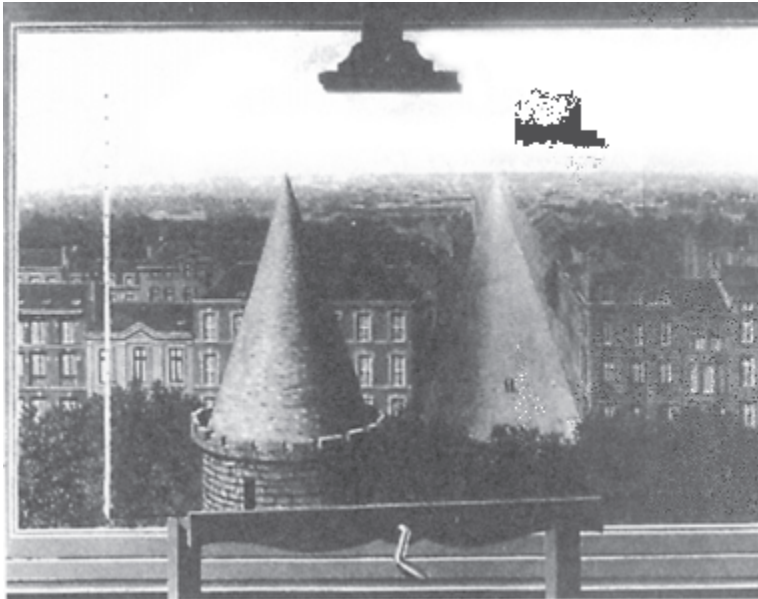
۵. در شکل روبه‌رو طول ضلع مکعب مستطیل 10 سانتی‌متر و ارتفاع آن 16 سانتی‌متر است.

الف) مساحت کل و حجم استوانه را به‌دست آورید.
ب) حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب مستطیل چقدر است؟



۶. دو استوانه‌ی قائم که مرکز قاعده‌های آن‌ها یکی است، را در نظر بگیرید. با توجه به اندازه‌های روی شکل:

الف) نسبت مساحت جانبی استوانه‌ی بزرگتر به مساحت جانبی استوانه‌ی کوچکتر را بیابید.
ب) نسبت حجم استوانه‌ی بزرگتر به حجم استوانه‌ی کوچکتر چقدر است؟
پ) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.



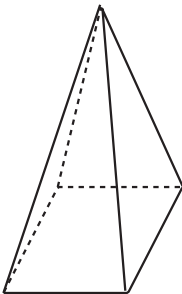
درباره‌ی اثر معروف رنه ماگريت با عنوان گردش‌گاه اقلیدوسی فکر کنید، در آن چه می‌بینید؟

۴-۵-هرم و مخروط

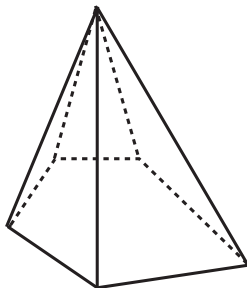
یکی از بزرگترین شکل‌های فضایی ساخت دست بشر، اهرام مصر است که بیش از چهار هزار سال از عمر آن می‌گذرد و تنها مورد از «عجایب هفتگانه» است که هنوز پا برجا می‌باشد. هرکدام از این هرم‌ها، ارتفاعی به اندازه‌ی یک ساختمان چهل طبقه دارد و بر روی هم با بیش از دو میلیون قطعه سنگ که وزن هرکدام بین ۲ تا ۱۵۰ تن است ساخته شده‌اند.



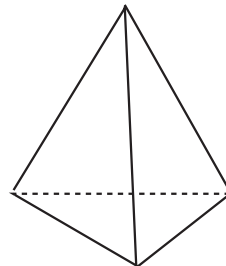
اگرچه مصریان باستان هرم‌هایی ساختند که قاعده‌ی آن‌ها به شکل مربع بود، ولی چندضلعی‌های دیگر نیز می‌توانند قاعده‌ی یک هرم باشند.



هرم مربعی

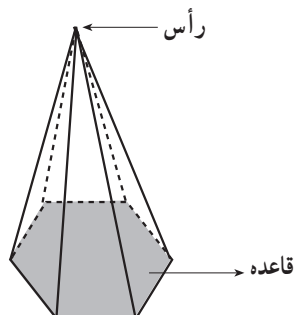


هرم پنج ضلعی



هرم مثلثی

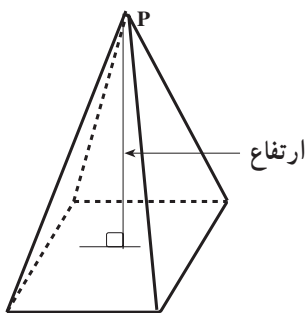
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک اند.



شکل ۲۹

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. (چرا؟)

ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



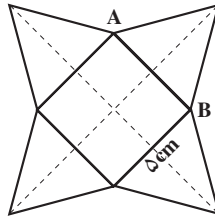
قاعده‌های هرم‌های معروف مصر، چهارضلعی‌های منتظم (مربعی شکل) هستند.

اگر قاعده‌ی یک هرم، چند ضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامیم.

توجه: مرکز چند ضلعی منتظم، مرکز دایره‌ای است که از رأس‌های این چند ضلعی می‌گذرد.

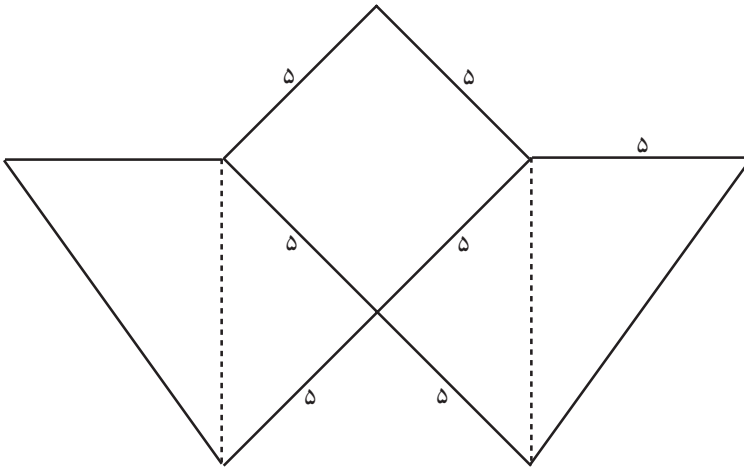
فعالیت ۴-۶

۱. ارتفاع مثلث‌ها در شکل ۳۰ چقدر باشد تا هرم به دست آمده ارتفاعی برابر ۲/۵ سانتی متر داشته باشد؟

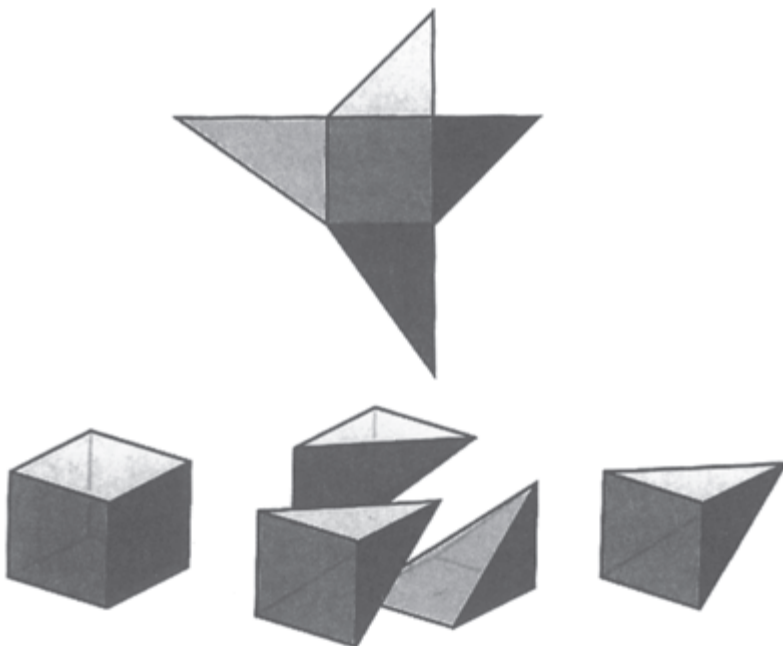


شکل ۳۰

۲. طول بزرگترین ضلع در الگوی زیر چند واحد است؟

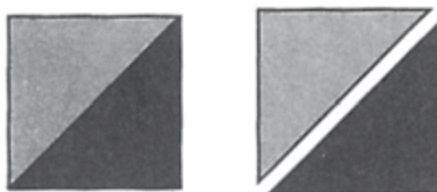


- سه قطعه مقوا مطابق الگوی فوق برش دهید و سه هرم بسازید. هرم‌ها را طوری کنار هم قرار دهید تا یک مکعب به دست آید. چه نتیجه‌ای درباره‌ی حجم مکعب و هرم‌ها می‌گیرید؟ حجم هرم، برحسب حجم مکعب چقدر است؟



شکل ۳۱

در فعالیت فوق، سه هرم را کنار هم گذاشتید و یک مکعب که خود یک منشور است ساختید. این کار مانند آن است که یک مکعب را به سه هرم با حجم‌های مساوی تجزیه^۱ کنیم. قبلاً نیز برای محاسبه‌ی مساحت مثلث، یک متوازی‌الاضلاع یا مستطیل را به دو مثلث هم مساحت تجزیه کردیم.



شکل ۳۲

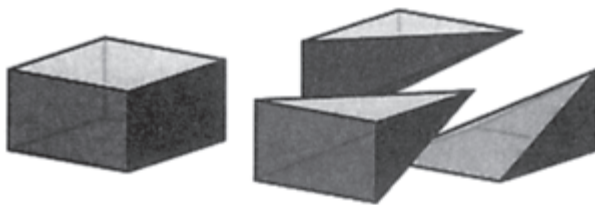
با استفاده از ایده‌ی تجزیه‌ی شکل‌ها، می‌توان حجم هرم را در حالت کلی محاسبه کرد. با پذیرفتن این موضوع که دو هرم با سطح قاعده‌ها و ارتفاع‌های مساوی دارای حجم‌های یکسان هستند^۲، کافی است که حجم یک هرم با قاعده‌ی مربع را پیدا کنیم زیرا برای هر هرم دیگری می‌توان هر می با قاعده‌ی مربع ساخت که مساحت قاعده و ارتفاع آن با مساحت قاعده و ارتفاع آن هرم برابر باشد^۳. برای این منظور مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌ی آن همان قاعده‌ی هرم فوق و ارتفاع آن

۱- Decomposition

۲- در این کتاب، این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم.

۳- اگر مساحت قاعده‌ی هرم اولیه S باشد کافی است هرمی با قاعده‌ی مربع به طول ضلع $\sqrt{S}$ بسازیم.

نیز با ارتفاع هرم برابر باشد. این مکعب مستطیل را به سه هرم تجزیه می‌کنیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

این سه هرم همنهشت نیستند ولی دارای حجم‌های مساوی هستند.^۱ چون حجم مکعب مستطیل مساوی مجموع حجم این سه هرم است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \text{حجم هرم} &= \frac{1}{3} (\text{حجم مکعب مستطیل}) \\ &= \frac{1}{3} (S \times h) \end{aligned}$$

که S مساحت قاعده‌ی هرم و h ارتفاع آن است.

حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با

$$V = \frac{1}{3} S \times h$$

همان‌طور که با زیاد کردن تعداد ضلع‌های قاعده‌ی یک منشور که چندضلعی منتظم بود شکل



بستنی قیفی

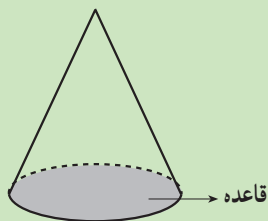


کلاه مخروطی

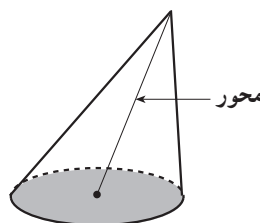
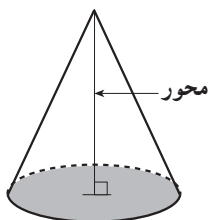
قاعده به دایره نزدیک و نزدیک‌تر شد و به این ترتیب استوانه را به دست آوردیم، با انجام همین عمل در مورد هرمهای منتظم نیز یک شکل فضایی به نام مخروط به دست می‌آید. اگر نگاهی به اطراف خود بیندازید، اشیای مخروطی شکل بسیاری می‌بینید.

۱- اثبات این مطلب خارج از برنامه‌ی این درس است.

مخروط^۱ شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چند ضلعی، دایره است.



رأس، قاعده و ارتفاع یک مخروط مانند هرم تعریف می‌شوند. پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط، قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

حجم یک مخروط را می‌توان با حجم یک هرم با قاعده‌ی چند ضلعی منتظم تقریب زد:

$$\text{ارتفاع (مساحت قاعده)} \times \frac{1}{3} \approx \text{حجم مخروط}$$

هر اندازه تعداد ضلع‌های این چند ضلعی بیشتر گردد، مساحت قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی مخروط نزدیکتر می‌شود و در نتیجه، حجم هرم به حجم مخروط نزدیکتر می‌گردد. بنابراین،

حجم یک مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با

$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

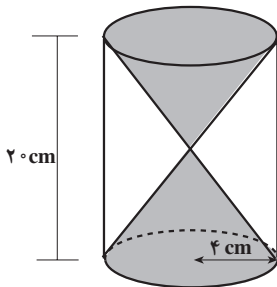
۱- عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲- علامت $\approx$ را بخوانید: تقریباً برابر است با

مسائل

۱. ساعت شنی که مردمان باستان برای اندازه‌گیری زمان از آن

استفاده می‌کردند، از دو مخروط یکسان که درون یک استوانه‌ی قائم قرار داشتند ساخته شده بود. فرض کنید ارتفاع استوانه ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۴ سانتی‌متر است.



الف) حجم ناحیه‌ی سایه زده شده در شکل را پیدا کنید.

ب) حجم ناحیه‌ی محصور بین دو مخروط و استوانه را محاسبه کنید.

۲. شعاع قاعده‌ی یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای

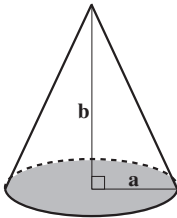
هر کدام از موارد زیر عبارتی بر حسب a و b پیدا کنید :

الف) حجم مخروط ؛

ب) حجم مخروطی با همین شعاع قاعده اما ارتفاع دو برابر ؛

پ) حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع قاعده‌ی دو برابر ؛

ت) حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر.



۳. حجم مخروط چه تغییری می‌کند اگر :

الف) ارتفاع آن دو برابر شود، اما شعاع قاعده تغییر نکند ؛

ب) شعاع قاعده دو برابر شود، ولی ارتفاع تغییر نکند.

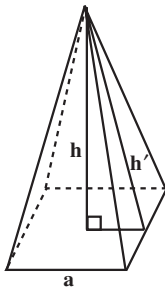
۴. حجم هرم مربعی منتظم در شکل مقابل را با توجه به داده‌های زیر

به‌دست آورید :

الف) $a = 14\text{cm}$ ، $h' = 25\text{cm}$ ؛

ب) $h = 6\text{cm}$ ، $h' = 6/5\text{cm}$ ؛

پ) $a = 1\text{cm}$ ، $h = 1/3\text{cm}$.



۵. یک چهاروجهی را که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد

در نظر بگیرید، حجم آن را بر حسب a به‌دست آورید. اگر $a = 4/5\text{cm}$ حجم چهاروجهی چقدر

می‌شود؟ (در این چهاروجهی ارتفاع از محل تقاطع نیمسازهای وجه مقابل می‌گذرد.)



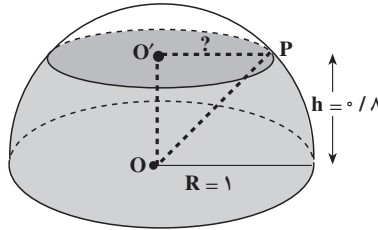
۴-۶- کره

تجربه‌ی سال‌های کودکی شما که توپ سرخ و سفید و آبی را محکم به زمین می‌زدید تا به هوا رفتنش را با شادی تماشا کنید، فرصت خوبی برای آشنا شدن با کره بود. توپ شما میانش خالی بود و چون سطح آن کاملاً گرد بود، روی زمین آرام و قرار نداشت و می‌غلتید و شما را به دنبال خودش می‌کشانید! اگر به اطراف خود نگاه کنید، جسم‌های کروی (کره‌ای شکل) زیادی را می‌بینید. توپ بسکتبال و توپ تنیس روی میز به شکل کره هستند و توپ فوتبال خیلی شبیه کره است.

کره مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت شعاع کره نامیده می‌شود.

فعالیت ۴-۷

۱. یک کیک به شکل نیمکره را در نظر بگیرید که شعاع آن یک واحد باشد. کیک را از قسمت مسطح آن روی یک سینی بگذارید (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگر کیک را موازی با سینی و در ارتفاع‌های متفاوت ببرید، قطعه‌هایی با سطح مقطع‌های متفاوت به دست می‌آورید. برای مثال، سطح مقطع برشی از کیک را در ارتفاع $h = 0.8$ به دست می‌آوریم. برای این کار، با استفاده از قضیه فیثاغورس، شعاع سطح مقطع را از مثلث قائم‌الزاویه $O'PO$ محاسبه می‌کنیم:

$$O'P^2 = OP^2 - OO'^2$$

$$OP = \text{شعاع نیمکره} = 1 \text{ و } OO' = h = 0.8$$

چون

پس

$$O'P^2 = 1^2 - (0.8)^2$$

$$= 1 - 0.64$$

$$= 0.36$$

و چون شعاع سطح مقطع همان $O'P$ است، پس مساحت سطح مقطع (A) برابر است با:

$$A = \pi \times O'P^2$$

$$= 3.14 \times 0.36$$

در نتیجه:

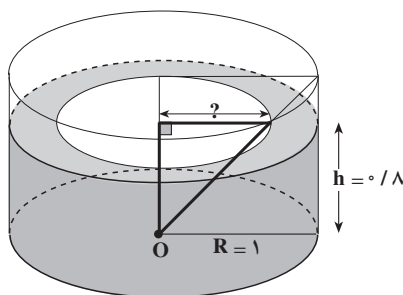
$$A = 1.1304$$

الف) مساحت برشی از کیک (سطح مقطع نیمکره) را در ارتفاع $h = 0.6$ به دست آورید.

ب) شعاع برشی از کیک را در ارتفاع $h = 0.4$ پیدا کنید.

پ) فرمولی برای پیدا کردن مساحت برشی از کیک (A) بر حسب h به دست آورید.

۲. اکنون کیک به شکل استوانه که یک قسمت مخروطی شکل از داخل آن برداشته شده است در نظر بگیرید، به طوری که سطح قاعده و ارتفاع این کیک برابر سطح قاعده و ارتفاع کیک نیمکره‌ای شکل باشد.



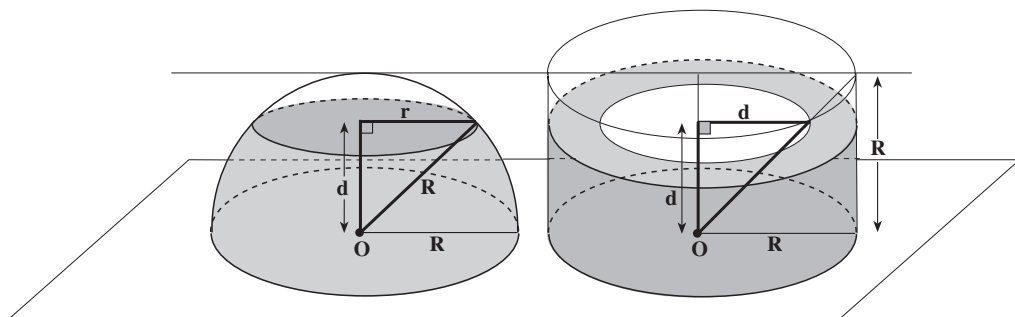
شکل ۳۶

۳. قسمت‌های (الف) تا (پ) را برای کیک فوق انجام دهید.

۴. با مقایسه‌ی مساحت برش‌های مختلف (سطح مقطع‌ها) در دو کیک، چه نظری در مورد حجم نیمکره دارید؟ اصل کاوالیری را به یاد بیاورید!

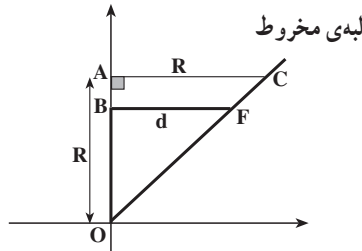
می‌خواهیم با استفاده از اصل کاوالیری، حجم نیمکره را با حجم استوانه‌ای که یک مخروط از آن خارج شده است مقایسه کنیم.

برای این کار، یک نیمکره با شعاع R و یک استوانه با شعاع R و ارتفاع R در نظر بگیرید که مخروطی با همان ارتفاع و همان شعاع از داخل آن برداشته شده است. این دو جسم فضایی را بر روی یک صفحه قرار می‌دهیم و آن‌ها را در ارتفاع d ، d کوتاه‌تر از R است) به وسیله‌ی یک صفحه‌ی موازی با این صفحه قطع کرده، آنگاه سطح مقطع‌های آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.



شکل ۳۷

سطح مقطع قائم شکل ۳۷ را دوباره رسم می کنیم.



با توجه به این که شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط برابر هستند، مثلث OAC متساوی الساقین است و چون زاویه ی A قائمه است، زاویه های O و C هر دو 45° هستند. همچنین در مثلث OBF نیز $\hat{O} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{F} = 45^\circ$. پس مثلث OBF متساوی الساقین است. یعنی،

$$BF = OB$$

از طرفی $OB = d$. بنابراین :

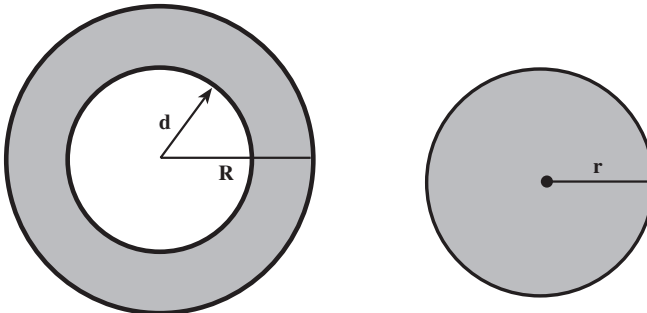
$$BF = d$$

حال اگر سطح مقطع شکل ۳۷ را در نظر بگیرید، یک حلقه به دست می آید که شعاع دایره ی بزرگتر، R و شعاع دایره ی کوچکتر d است.

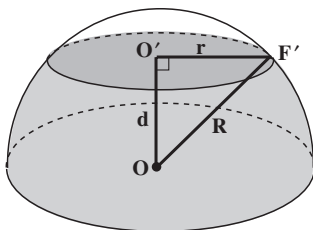
و

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = \pi R^2 - \pi d^2 \quad (۱)$$

همچنین سطح مقطع نیمکره یک قرص است.



برای پیدا کردن شعاع این قرص، به برش قائم آن نگاه می کنیم.



چون مثلث $OO'F'$ قائم الزاویه است (دلیل آن را توضیح دهید).

پس بنابر قضیه ی فیثاغورس

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - d^2 \\ \text{مساحت قرص} &= \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - d^2) \\ &= \pi R^2 - \pi d^2 \end{aligned} \quad (2)$$

چون (۱) و (۲) یعنی مساحت سطح مقطع های شکل ۳۷ با هم برابرند در نتیجه طبق اصل کاوالیری، حجم های آن ها نیز با هم مساوی هستند یعنی حجم نیمکره با حجم استوانه ای که یک مخروط هم قاعده و هم ارتفاع از آن خارج شده باشد برابر است. پس

$$\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \text{حجم نیمکره} \quad (3)$$

چون شعاع استوانه R و ارتفاع آن نیز R است در نتیجه :

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \text{حجم استوانه} \\ &= \pi R^2 \times R \\ &= \pi R^3 \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین حجم مخروطی با شعاع قاعده ی R و ارتفاع R برابر است با :

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} &= \text{حجم مخروط} \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 \times R \\ &= \frac{1}{3} \pi R^3 \end{aligned} \quad (5)$$

از جایگزینی (۴) و (۵) در (۳)، حجم نیمکره به دست می آید :

$$\text{حجم نیمکره} = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3$$

$$\boxed{\text{حجم نیمکره} = \frac{2}{3} \pi R^3}$$

حجم کره دو برابر حجم نیمکره است، در نتیجه :

حجم کره ای به شعاع R برابر است با :

$$\text{حجم کره} = 2 \times \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

پیدا کردن سطح جانبی کره با استفاده از حجم کره

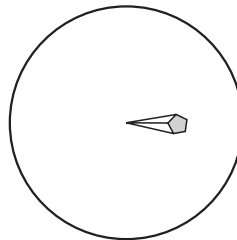
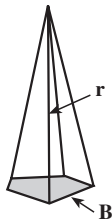
حجم تقریبی کره را می توانیم به طریق دیگری به دست آوریم. برای این کار، کره را به تعداد



زیادی شبه هرم تقسیم می کنیم، یعنی تصور کنید که سطح کره با تعداد بسیاری چندضلعی های خیلی کوچک پوشانده شده است. البته باید توجه داشته باشیم که این چندضلعی ها واقعی نیستند زیرا روی کره هیچ پاره خط راستی نمی تواند قرار بگیرد. هر کدام از این شبه چندضلعی ها قسمت هایی از سطح کره هستند، پس مسطح نمی باشند. تصوّر کنید که نقاط روی ضلع های این شبه چندضلعی ها را به

مرکز کره وصل کرده ایم به طوری که این شبه چندضلعی ها، قاعده های

تعداد بسیاری شبه هرم با رأس مشترک یعنی مرکز کره باشند. در نتیجه، ارتفاع این شبه هرم ها برابر شعاع کره یعنی R است.



اگر قاعده‌ی یکی از شبه‌هرم‌ها را S در نظر بگیریم، حجم آن تقریباً مساوی $\frac{1}{3}R \times S$ می‌گردد. مجموع حجم این شبه‌هرم‌ها تقریب خوبی برای حجم کره می‌باشد. اگر سطح قاعده‌ی هر شبه‌هرم را به ترتیب $S_1, S_2, \dots, S_n$ بنامیم، پس

$$\text{مجموع حجم شبه‌هرم‌ها} = \text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}RS_1 + \frac{1}{3}RS_2 + \dots + \frac{1}{3}RS_n$$

یا

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + \dots + S_n)$$

از طرفی، مجموع مساحت‌های قاعده‌های شبه‌هرم‌ها برابر مساحت سطح کره است که آن را با S نمایش می‌دهیم. در نتیجه:

$$\boxed{\text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}RS}$$

باید توجه داشته باشیم که هرچقدر تعداد شبه‌هرم‌ها بیشتر و بیشتر شود، حجم تقریبی کره به مقدار واقعی آن یعنی $\frac{4}{3}\pi R^3$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. بنابراین،^۱

$$\frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3$$

و از آنجا

$$S = 4\pi R^2$$

یعنی

$$\text{مساحت کره} = 4\pi R^2$$

۱- تنها قسمت نادقیق این استدلال، مساوی قراردادن مقدار حجم تقریبی با حجم واقعی بود. برای دقیق‌نمودن این استدلال، نیاز به ابزاری داریم که بالاتر از سطح این درس است.

مسائل

۱. دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر هستند.
 (الف) مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.
 (ب) حجم هر یک را به‌دست آورید.
- پ (اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟
 ن (اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟
۲. مشابه سه‌بعدی یک نیم‌دایره، نیمکره است. چون محیط یک دایره به شعاع r ، برابر است با $2\pi r$ ، طول یک نیم‌دایره πr است. فرض کنید شعاع نیمکره r باشد. برای هرکدام از موارد زیر فرمولی به‌دست آورید :
 (الف) حجم نیمکره ؛
 (ب) مساحت رویه‌ی نیمکره ؛
- پ (مساحت کل نیمکره، یعنی مجموع مساحت‌های رویه‌ی نیمکره و سطح دایره‌ای مسطح آن.
 ۳. زمین تقریباً شکل یک کره است. شعاع زمین 6400 کیلومتر است.
 (الف) مساحت سطح زمین را حساب کنید.
 (ب) حجم زمین را حساب کنید.
۴. مساحت سطح یک کره 36π سانتی‌متر مربع است.
 (الف) شعاع این کره را به‌دست آورید.
 (ب) حجم کره را محاسبه کنید.

منابع

- 1- Dieudonné, J. (1981). The **universal domination of geometry**. ZDM, 13 (1), P 5-7.
- 2- Discussion Document for an ICME Study. (1994). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st century**. The International Commission on Mathematical Instruction.
- 3- Dukowski, L. & etal. (1988). **Mathematics 8**. Houghton Mifflin Canada Limited.
- 4- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. **Mathematics Teacher**. 74(1),11-26
- 5- Hoechsmann, K. (1991). **Lecture notes**. Mathematics Department, The University of British Columbia. Vancouver, Canada.
- 6- Jacobs, H. R. (1974). **Geometry** . W.H.Freeman & Company.
- 7- Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics, A Human Endeavor**. 2nd ed. W. H. Freeman & Company.
- 8- Kalin, R.& Corbitt, M.K. (1990). **Geometry: Teachers' Edition**. Prentice Hall, N J.
- 9- Kelly, B., Alexander, B.& Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10**. Addison - Wesley Pub. Ltd.
- 10- Kerr, D.R, JR. (1981). A geometry from National Assessment. **Mathematics Teacher**. 74 (1), 27-32
- 11- Kline, M. (1974). **Why Johnny Can't add: The failure of the New Math**. New york: Vintage Books.
- 12- Lakatos, I. (1977). **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery**. London: Cambridge University Press.
- 13- Lang, S., Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course**, 2nd ed. Springer - Verlag.
- 14- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1970). **A History of Mathematics Education in the United States and Canada**. Thirty Second



- year book. Author.
- 15- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1985). **Secondary School mathematics Curriculum: 1985 Yearbook**. Edited by C.R.Hisch. Reston, VA: Author
 - 16- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1987). **Learning and teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook**. Edited by M.M. Lindquist. Reston, VA: Author
 - 17- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**, Reston, VA: Author.
 - 18- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry from Multiple Perspectives: Addenda Series, Grades 9-12: Author.**
 - 19- Robitaille, D. F.(1973). Why are we teaching high school Geometry? **Vector**. 14 (4), 13 - 22.
 - 20- Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal of Research in Mathematics Education**. 20 (3), 309-321.
 - 21- Steen, L. A.(ed.) (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy**. National Academy Press, Washington D.C.
 - 22- Stone, M. (1971). Learning and teaching axiomatic geometry. **Educational Studies in Mathematics**. 4, 91-103.
 - 23- Welchons, A. M., Krichenberger, W. R., Pearson & H. R.(1976). **Plane Geometry** . Ginn & Company.
- ۲۴- مویز و دانز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم : محمود دبّانی)، انتشارات فاطمی، تهران.
- ۲۵- بختیاری، جواد. جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.



فهرست

۱	فصل ۱- هندسه و استدلال
۱	۱-۱- کشف اطلاعات از طریق مشاهده
۲	۱-۲- کشف اطلاعات از طریق تجربه
۱۵	۱-۳- استدلال در هندسه
۱۷	۱-۴- مثلث‌های همنهشت
۲۱	۱-۵- مثلث متساوی‌الساقین
۲۸	۱-۶- از خَم ساده تا چندضلعی
۳۱	۱-۷- متوازی‌الاضلاع
۳۷	فصل ۲- مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس
۳۷	۲-۱- مساحت
۵۳	۲-۲- قضیه‌ی فیثاغورس
۶۸	فصل ۳- تشابه
۶۸	۳-۱- نسبت و تناسب
۷۷	۳-۲- قضیه تالس در مثلث
۸۳	۳-۳- مثلث‌های متشابه
۸۶	۳-۴- حالت‌های تشابه دو مثلث
۹۳	۳-۵- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه
۹۷	۳-۶- محیط و مساحت شکل‌های متشابه
۱۰۷	فصل ۴- شکل‌های فضایی
۱۰۸	۴-۱- خط و صفحه در فضا
۱۱۰	۴-۲- مکعب مستطیل
۱۱۷	۴-۳- منشور و استوانه
۱۲۳	۴-۴- اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه
۱۲۹	۴-۵- هرم و مخروط
۱۳۶	۴-۶- کُرّه
۱۴۴	منابع