ریاضی ۲ — آزمون شماره ۱

۱- در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی یازدهم ۲۷ برابر جمله‌ی هشتم و جمله‌ی پنجم برابر ۵۶۷- است. جمله‌ی اول را بیابید.

۲- معکوس‌پذیری تابع $y = 4x^3 - 2$ را بررسی کنید و ضابطه‌ی معکوس آن را در صورت وجود بیابید.

۳- فرض کنید $f(\frac{x-1}{x+1}) = 3x+5$ باشد، آن‌گاه $f(-3)$ را بیابید.

۴- حدود m را طوری بیابید که عبارت $(m+1)x^2 - mx + 3m$ همواره مثبت بماند.

۵- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x}+2}$ را به‌دست آورید و به‌صورت فاصله بنویسید.

۶- نمودار تابع $y = \log_2^{(x-1)}$ را رسم کنید و برد آن را تعیین نمایید.

۷- اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/4$ و $\log 7 = 0/8$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\log\frac{\sqrt[5]{35}}{12}$.

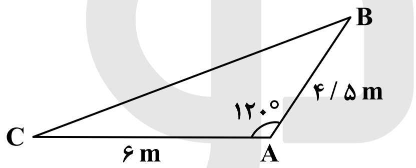
۸- معادله‌ی لگاریتمی $\log_2^{\sqrt{x+5}} - \log_2^3 = 1 - \log_2^{\sqrt{x}}$ را حل کنید.

۹- اگر $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$، آن‌گاه حاصل $A = \frac{\mathrm{Sin}(\frac{7\pi}{2}+\alpha) + 2\mathrm{Cos}(\alpha - \frac{\pi}{2})}{4\mathrm{Sin}(\alpha - \frac{5\pi}{2}) + 2\mathrm{Cos}(8\pi - \alpha)}$ را بیابید.

۱۰- باغچه‌ای مثلث‌شکل به‌صورت مقابل وجود دارد. باغبان می‌خواهد برای این باغچه کود تهیه کند. اگر برای هر مترمربع زمین ۶۰۰ گرم کود نیاز باشد.

الف) باغبان چه مقدار کود باید برای این باغچه تهیه کند.

ب) مقدار BC را به‌دست آورید.



۱۱- الف) حداکثر و حداقل مقدار تابع مقابل را حساب کنید و پس از تعیین دوره تناوب آن را در یک دوره تناوب رسم کنید (با رسم جدول مقادیر).

$$y = -2\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x + 1$$

ب) آیا $x = \pi$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^4 x - 2\mathrm{Cos}\,x - 2$ است؟

۱۲- دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2y + \frac{x}{2} = \frac{13}{2} \\ 5x = 2y - 1 \end{cases}$$

۱۳- الف) با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل $A^2 + A^{-1} + 5I$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $A^3 + A^2 = I$، آن‌گاه معکوس ماتریس A را بیابید.

۱۴- با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶

الف) چند عدد ۵رقمی زوج می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

ب) چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

ج) چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (با تکرار ارقام)

۱۵- مقدار n را از تساوی $3P(n,3) = 8\binom{n+1}{5}$ بیابید.

۱۶- در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی است. به چند طریق می‌توان پنج مهره انتخاب کرد به‌طوری‌که:

الف) در انتخاب محدودیتی نباشد.

ب) ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی باشد.

ج) حداقل ۲ مهره قرمز باشد.

ریاضی ۲ — آزمون شماره ۲

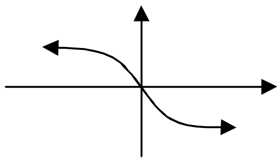
۱- الف) جمله‌ی پنجم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به‌ترتیب ۴ و ۲۰ می‌باشد. قدر نسبت این دنباله را به‌دست آورید.

ب) اگر مجموع جمله‌های اول تا nام یک دنباله‌ی هندسی را با S_n نمایش دهیم، رابطه‌ای برای S_n برحسب a_1 و q به‌دست آورید.

ج) $A = \sqrt[12]{144} + \sqrt{3\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{-2\sqrt{3}}$ را محاسبه کنید.

۲- الف) نقاط $A(m^2,5)$ و $B(3,m+3)$ و $C(4,5)$ نقاطی از تابع خطی $f(x)$ می‌باشند. ضابطه‌ی این تابع را به‌دست آورید.

ب) شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ می باشد. نمودار معکوس این تابع را رسم کنید.



۳- اگر $f(x) = -\sqrt{1-x}$ و $g(x) = |x-2| - 3$ باشد، تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را از طریق رسم دو تابع به‌دست آورید.

۴- الف) اگر a و b دو عدد حقیقی غیرصفر و $a.b<0$ باشد، ثابت کنید $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \le -4$

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x-x^3}$ را محاسبه کرده و به‌صورت بازه نمایش دهید.

۵- الف) نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^{1-x}$ را رسم کنید.

ب) ابتدا ثابت کنید $a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}$ (تمام لگاریتم‌ها قابل محاسبه هستند) و سپس حاصل $9^{(\log_{27}^{8}+\log\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-1)}$ را به‌دست آورید.

ج) اگر $\log_3^{(\log_2^{x^2})} = 0$ باشد، مقدار لگاریتم x^6+8 را در مبنای ۴ محاسبه کنید.

۶- الف) نقطه‌ی $A(1,0)$ به اندازه‌ی $\frac{23\pi}{6}$ حول مبدأ مختصات و در جهت مثبت دوران می‌کند. مختصات نقطه‌ی به‌دست آمده را محاسبه کنید.

ب) اگر $\cos\theta = \frac{2}{5}$ باشد، مقادیر ممکن برای $\tan\theta$ را به‌دست آورید.

ج) اگر انتهای کمان‌هایی مانند θ که در رابطه‌ی $2\sin^3\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$ صدق می‌کنند را با پاره‌خط به هم وصل کنیم چه شکلی پدید می‌آید؟ (ابتدا مقادیر θ را به‌دست آورید.)

د) کسر تعریف شده‌ی زیر را ساده کنید:

$$A = \frac{\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos^2(\alpha-4\pi)}{\cos(3\pi+\alpha)\cos(\frac{5\pi}{2}+\alpha)}$$

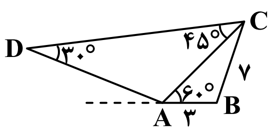
۷- فاصله‌ی یک نوسانگر برحسب سانتی‌متر از نقطه‌ی تعادل برحسب زمان از رابطه‌ی $x=12\sin(0/1\pi t)$ محاسبه می‌گردد. ابتدا نمودار حرکت این نوسانگر را رسم کنید و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) پس از چند ثانیه نوسانگر یک رفت و برگشت کامل انجام داده است؟

ب) پس از چند ثانیه نوسانگر از نقطه‌ی تعادل می‌گذرد؟

ج) بیش‌ترین فاصله‌ی نوسانگر از نقطه‌ی تعادل چقدر است و در چه زمان‌هایی رخ می‌دهد؟

۸- در شکل مقابل مقدار DC را به‌دست آورید: $(\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$



۹- الف) اگر $[x \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ \frac{7}{2}\end{bmatrix} = 0$، مقدار x را به‌دست آورید.

ب) اگر دترمینان ماتریس A را با نماد $|A|$ نمایش دهیم، برای ماتریس $A_{2\times2}$ و عدد حقیقی K نشان دهید: $|KA| = K^2|A|$

ج) از معادله‌ی مقابل، ماتریس X را محاسبه کنید: $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}7 & -4\\ 1 & 8\end{bmatrix}$

۱۰- الف) با حروف کلمه‌ی «triangle» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف r و g همواره کنار هم باشند و در وسط کلمه قرار گیرند؟ (بدون تکرار)

ب) با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۳ رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱۱- الف) با ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره چند بردار می‌توان ساخت؟

ب) با ۵ نفر به نام‌های A و B و C و D و E به چند طریق می‌توان صف‌های پنج‌نفره ساخت به‌طوری که A و B کنار هم باشند ولی C و D کنار هم نباشند؟

۱۲- ابتدا با اصل ضرب تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را به‌دست آورید و سپس با استفاده از مفهوم زیرمجموعه، ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{n}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

پاسخ سؤال‌های امتحانی ریاضی ۲- آزمون۱

-۱

$$\begin{cases} a_{۱۱} = ۲۷a_{۸} & a_۱q^{۱۰} = ۲۷a_۱q^{۷} & q = ۳ \\ a_{۵} = -۵۶۷ & a_۱q_۱^{۴} = -۵۶۷ & a_۱ = -۷ \end{cases}$$

-۲

$$y_۱ = y_۲ \rightarrow x_۱ = x_۲ \qquad y = \sqrt[۳]{\frac{x+۲}{۴}}$$

-۳

$$\frac{x-۱}{x+۱} = -۳ \rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \qquad f(-۳) = \frac{۷}{۲}$$

-۴

$$\begin{matrix} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} m^۲ - ۱۲m(m+۱) < ۰ \quad -۱۱m^۲ - ۱۲m < ۰ \quad m < ۰ \quad ، m = -\frac{۱۲}{۱۱} \\ m + ۱ > ۰ \rightarrow m > -۱ \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\cap} m > ۰ \text{ ج م}$$

-۵

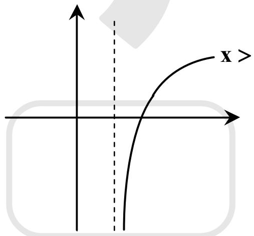
$$\frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۳ \\ x = ۱ \end{cases}$$

	-۳		۰		۱	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲ + ۲x - ۳$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$f \geq ۰$	$-$	۰	$+$	ن	$-$		$+$

مجموعه جواب : $[-۳,۰) \cup [۱,+\infty)$

-۶

برد $= R$



-۷

$$\frac{۱}{۵}(\log ۳۵ - \log ۱۲) = \frac{۱}{۵}(\log ۷ + \log ۵) - \frac{۱}{۵}(\log ۴ + \log ۳)$$
$$= \frac{۱}{۵}(\log ۷ + ۱ - \log ۲) - (۲\log ۲ + \log ۳) = -\frac{۷}{۱۰}$$

-۸

$$\log_۲ \frac{\sqrt{x+۵}}{۳} = \log_۲ \frac{۲}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+۵}}{۳} = \frac{۲}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^۲ + ۵x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{غ ق} \\ x = -۹ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

-۹

$$A = \frac{-\cos\alpha - ۲\sin\alpha}{-۴\cos\alpha + ۲\cos\alpha} = \frac{-۱ - ۲\tan\alpha}{-۲} = \frac{-۱ - ۲(-\frac{۱}{۲})}{-۲} = \frac{-۱+۱}{-۲} = ۰$$

-۱۰

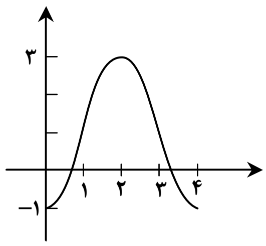
$$ABC = \frac{۱}{۲} \times ۴/۵ \times ۶ \times \sin ۱۲۰ = ۳ \times ۴/۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۱/۷۴ \qquad ۱۱/۷۴ \times ۶۰۰ = ۷۰۴۴$$

$$BC^۲ = (۴/۵)^۲ + ۶^۲ - ۲ \times ۴/۵ \times ۶ \times \cos ۱۲۰ = ۲۰/۲۵ + ۳۶ + ۲ \times ۴/۵ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۸۳/۲۵ \qquad a = \sqrt{۸۳/۲۵}$$

۱۱- الف)

$\max = ۳ \qquad \min = -۱ \qquad T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴$

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	−۱	۱	۳	۱	−۱



ب)

$f(x) = \frac{۱}{۲}\operatorname{Sin}^۴ \pi - ۲\operatorname{Cos}\pi - ۲ = ۰$

-۱۲

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۳ \\ -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۲۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲۲}\begin{bmatrix} -۲۲ \\ -۶۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۱۳- الف)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲۵ \end{bmatrix} \qquad A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

$$A^۲ + A^{-۱} + ۵I = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} + ۵\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۹}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱۵۱}{۵} \end{bmatrix}$$

ب)

$$A^۳ + A^۲ = I \xrightarrow{\times A^{-۱}} A^{-۱}AA^۲ + A^{-۱}AA = A^{-۱}I \qquad A^۲ + A = A^{-۱}$$

-۱۴

الف) $\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} = ۱۲۰$

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۳} = ۲۸۸ \quad \Rightarrow \quad ۴۰۸$

ب) $\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۱} = ۶۰$

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۱} = ۴۸ \quad \Rightarrow \quad ۱۰۸$

ج) $\boxed{۳}\ \boxed{۶}\ \boxed{۶}\ \boxed{۶} = ۳\times۶^۳ - ۱ = ۶۴۷$

-۱۵

$$\frac{۳\times n!}{(n-۳)!} = \frac{۸(n+۱)!}{(n-۴)!\times۵!} \Rightarrow \frac{۸(n+۱)}{۵!} = \frac{۳}{n-۳} \Rightarrow n^۲ - ۲n - ۳ - ۴۵ = ۰$$

$n^۲ - ۲n - ۴۸ = ۰ \Rightarrow n = ۸ \qquad n = -۶$ غ ق ق

-۱۶

الف) $\binom{۹}{۵} = ۱۲۶$

ب) $\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۲} = ۶۰$

ج) $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳}\binom{۴}{۲} + \binom{۵}{۴}\binom{۴}{۱} + \binom{۵}{۵}\binom{۴}{۰} = ۱۲۱$

راه حل دیگر:

از روش متمم : $۱۲۶ - \underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ مهره قرمز}}\binom{۴}{۴} = ۱۲۱$

پاسخ سؤال‌های امتحانی ریاضی ۲- آزمون ۲

۱- الف)

$$a_n = a+(n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a+4d=4 \\ a+11d=20 \end{cases} \Rightarrow 7d=16 \Rightarrow d=\frac{16}{7}$$

ب)

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$
$$S_n = a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{n-1}$$

طرفین را در $-q$ ضرب می‌کنیم:

$$\underline{-qS_n = -a_1q-a_1q^2-a_1q^3-\dots-a_1q^n}$$

$$S_n-qS_n = a_1-a_1q^n \Rightarrow S_n(1-q)=a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

ج)

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[12]{144}=\sqrt[12]{12^2}=\sqrt[6]{12} \\ \sqrt{3\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{54}}=\sqrt[6]{54} \\ \sqrt[3]{-2\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{\sqrt{12}}=-\sqrt[6]{12} \end{array}\right\} \Rightarrow A=\sqrt[6]{12}+\sqrt[6]{54}-\sqrt[6]{12}=\sqrt[6]{54}$$

۲- الف) می دانیم تابع خطی $y=ax+b$ یک به یک می‌باشد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} A(m^2,5) \\ C(4,5) \end{array}\right. \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

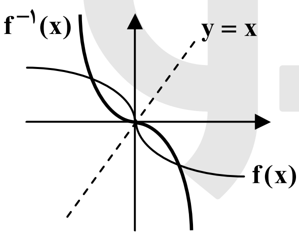
$$m=2 \Rightarrow A(4,5), B(3,5) \Rightarrow$$

تابع خطی یک به یک است، پس $m=2$ قابل قبول نیست.

$$y=ax+b \Rightarrow \begin{cases} 5=4a+b \\ 1=3a+b \end{cases} \Rightarrow a=4, b=-11$$

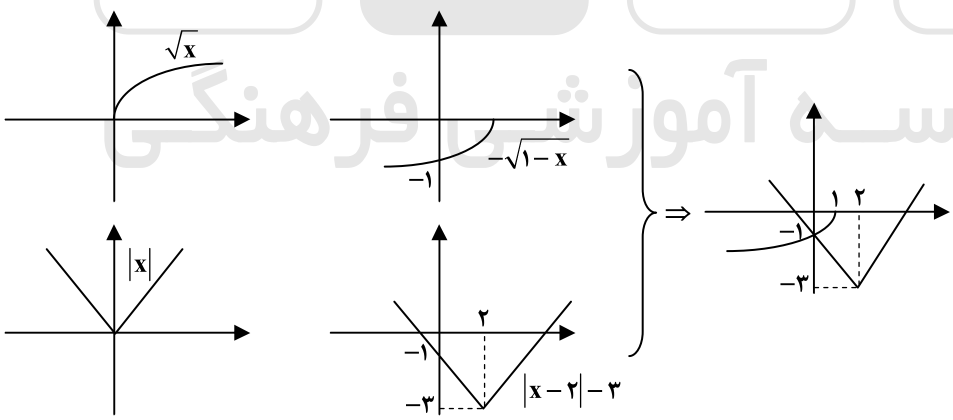
$$\Rightarrow f(x)=4x-11$$

ب)



نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.

۳- اگر دو تابع را در یک دستگاه رسم کنیم، تعداد ریشه‌ها برابر ۱ ریشه می باشد.



۴- الف) می‌دانیم:

$$t>0 \Rightarrow t+\frac{1}{t}\geq 2 \quad \text{و} \quad t<0 \Rightarrow t+\frac{1}{t}\leq -2$$

$$a.b<0 \Rightarrow \frac{a}{b}<0 \quad \text{و} \quad \frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$$

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\leq -4 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\leq -4 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$ برقرار است

دقت کنید عملیات‌های خط آخر تماماً برگشت‌پذیرند.

ب)

$$x-x^{۳}\geq ۰ \Rightarrow x(۱-x^{۲})\geq ۰$$

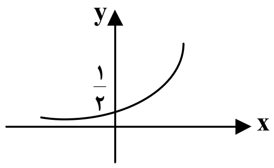
$$x(۱-x^{۲})=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

		-۱		۰		۱	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$۱-x^{۲}$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$P(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$x\in(-\infty,-۱]\cup[۰,۱]$$

۵- الف)

$$y=(\frac{۱}{۲})^{۱-x}\Rightarrow y=۲^{x-۱}$$



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲

ب)

$$\log_b^x=n\Rightarrow b^n=x$$

$$\log_b^a=m\Rightarrow b^m=a$$

$$\left.\begin{array}{l} a^{\log_b^x}=a^n=(b^m)^n=b^{m.n} \\ x^{\log_b^a}=x^m=(b^n)^m=b^{m.n} \end{array}\right\}\Rightarrow a^{\log_b^x}=x^{\log_b^a}$$

$|x-۲|-۳$

$$۹^{(\log_{۲۷}^{۸}+\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۶}}-۱)}=۹^{(\log_۳^۲+\log_۳^۶-\log_۳^۳)}=۹^{(\log_۳^{\frac{۲\times۶}{۳}})}=۹^{\log_۳^۴}=۴^{\log_۳^۹}=۴^۲=۱۶$$

دقت کنید:

$$\log_{۲۷}^{۸}=\frac{\log_{۱۰}^{۸}}{\log_{۱۰}^{۲۷}}=\frac{\log_{۱۰}^{۲^۳}}{\log_{۱۰}^{۳^۳}}=\frac{۳\log_{۱۰}^{۲}}{۳\log_{۱۰}^{۳}}=\log_۳^۲$$

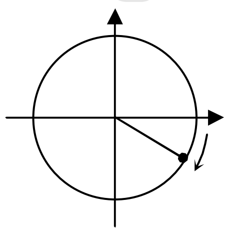
$$\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۶}}=\frac{\log_{۱۰}^{\sqrt{۶}}}{\log_{۱۰}^{\sqrt{۳}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\log_{۱۰}^{۶}}{\frac{۱}{۲}\log_{۱۰}^{۳}}=\log_۳^۶$$

ج)

$$\log_۳^{(\log_۲^{x^۲})}=۰\Rightarrow \log_۲^{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow$$ هردو جواب قابل قبول است

$$\log_۴^{x^۶+۸}=\log_۴^{(\pm\sqrt{۲})^۶+۸}=\log_۴^{۸+۸}=\log_۴^{۱۶}=\log_۴^{۴^۲}=۲$$

۶- الف)



$$\frac{۲۳\pi}{۶}=\frac{۲۴\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=۴\pi-\frac{\pi}{۶}$$

$$\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲},\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$p(\cos\theta,\sin\theta)\Rightarrow p(\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲})$$

دقت کنید در ناحیه چهارم مقدار $\cos\theta>۰$ و $\sin\theta<۰$ می باشد، پس $x>۰$ و $y<۰$ می باشد.

ب) روش اول:

$$\cos\theta=\frac{۲}{۵}$$

$$\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\Rightarrow \sin^۲\theta=۱-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{۲۱}}{۲},\tan\theta=\frac{-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

روش دوم:

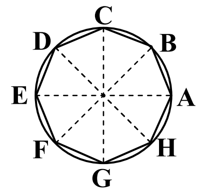
$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}-۱ \Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۲۵}{۴}-۱ \Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۲۱}{۴} \Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$$

ج)

$$۲\sin^۳\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=۰ \Rightarrow \sin\theta\cos\theta(۲\sin^۲\theta-۱)=۰$$

$$\sin\theta=۰ \Rightarrow \theta=۰,\pi,۲\pi \qquad \cos\theta=۰ \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$



با توجه به شکل مشاهده می‌شود که هشت‌ضلعی منتظم پدید می‌آید.

د)

$$\sin^۲(\alpha-\frac{\pi}{۲})=[\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})]^۲=[-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)]^۲=\cos^۲\alpha$$

$$\cos^۲(\alpha-۴\pi)=[\cos(\alpha-۴\pi)]^۲=[\cos(۴\pi-\alpha)]^۲=\cos^۲\alpha$$

$$\cos(۳\pi-\alpha)=\cos(۲\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$A=\frac{\cos^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}=\frac{۲\cos^۲\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{۲\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۲}{\tan\alpha}=۲\cot\alpha$$

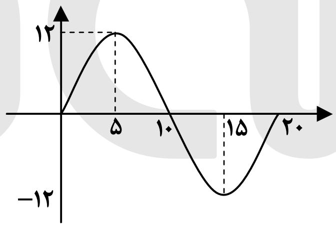
۷-

$x=۱۲\sin(۰/۱\pi t)$

دوره تناوب $=\frac{۲\pi}{۰/۱\pi}=۲۰(s)$

۱۲ = مقدار حداکثری

۱۲- = مقدار حداقلی



t	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
X	۰	۱۲	۰	۱۲-	۰

الف) ۲۰ ثانیه　　ب) پس از ۱۰ ثانیه　　ج) در $t=۵(s)$ و $t=۱۵(s)$

۸-

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲(AB)(AC)\cos\hat{A} \Rightarrow ۴۹=۹+AC^۲-۲(۳)AC(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۴۰=AC^۲-۳AC \Rightarrow AC^۲-۳AC-۴۰=۰ \Rightarrow \begin{cases} AC=-۵ \text{ غ ق ق} \\ AC=۸ \end{cases}$$

$$\hat{A}+\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}=۱۰۵^\circ$$

$$\frac{DC}{\sin\hat{A}}=\frac{AC}{\sin ۳۰} \Rightarrow \frac{DC}{\sin ۱۰۵}=\frac{۸}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow DC=۱۶\sin ۱۰۵=۱۶(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴})=۴(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$$

$$\sin(۱۰۵)=\sin(۹۰+۱۵)=\cos ۱۵=\sin ۷۵$$

$$\sin(۱۰۵)=\sin(۱۸۰-۱۵)=\sin ۷۵$$

۹- الف)

$$[x \quad ۲ \quad ۱]_{۱\times۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}=[x+۴ \quad ۲x+۱ \quad ۴]$$

$$[x+۴ \quad ۲x+۱ \quad ۴]\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ \frac{۷}{۲} \end{bmatrix}=x^۲+۴x+۴x+۲+۱۴=x^۲+۸x+۱۶=۰ \Rightarrow (x+۴)^۲=۰ \Rightarrow x=-۴$$

ب)

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad-bc$$

$$KA=\begin{bmatrix} ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |KA| = K^{۲}(ad-bc) = K^{۲}|A|$$

ج)

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۱۲-۲}\begin{bmatrix} ۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & -۴\\ ۱ & ۸\end{bmatrix} \Rightarrow X=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۳۰ & ۰\\ ۱۰ & ۲۰\end{bmatrix}=X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

۱۰- الف) اگر r و g در کنار هم باشند و در وسط کلمه، بنابراین داریم:

$$\overset{۶}{\bigcirc}\ \overset{۵}{\bigcirc}\ \overset{۴}{\bigcirc}\ \underbrace{\overset{۲}{\bigcirc}\ \overset{۱}{\bigcirc}}_{g,r}\ \overset{۳}{\bigcirc}\ \overset{۲}{\bigcirc}\ \overset{۱}{\bigcirc} \qquad ۶\times۵\times۴\times۲\times۱\times۳\times۲\times۱=۱۴۴۰$$

ب) برای حل دو حالت در نظر می‌گیریم:

I) در خانه‌ی اول عدد ۴ یا ۵ انتخاب شود:

$$\overset{۲}{\bigcirc}\ \overset{۵}{\bigcirc}\ \overset{۴}{\bigcirc} \qquad ۲\times۵\times۴=۴۰$$

II) در خانه‌ی اول عدد ۳ انتخاب شود، در این حالت خانه‌ی دوم حتماً باید عدد ۵ باشد:

$$\overset{۱}{\bigcirc}\ \overset{۱}{\bigcirc}\ \overset{۳}{\bigcirc} \qquad ۱\times۱\times۳=۳$$

پس در مجموع $۴۰+۳=۴۳$ حالت داریم.

۱۱- الف) چون باید دو نقطه از ده نقطه انتخاب شود و در بردار ترتیب نقاط اهمیت دارد، بنابراین $p(۱۰,۲)$ بردار می‌توان ساخت که برابر است با:

$$p(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۹۰$$

ب) حالاتی که A و B کنار هم هستند برابر است با: $۲!\times۴!=۴۸$

حالاتی که A و B کنار هم و C و D نیز کنار هم هستند برابر است با: $۲!\times۲!\times۳!=۲۴$

بنابراین حالاتی که A و B کنار هم هستند و D و C کنار هم نیستند برابر است با: $۴۸-۲۴=۲۴$

۱۲- اگر مجموعه‌ای شامل n عضو باشد، انتخاب زیرمجموعه یعنی انتخاب یک عضو یا عدم انتخاب آن عضو، بنابراین یک مجموعه‌ی n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه می‌باشد، زیرا:

$$\underbrace{\overset{۲}{\bigcirc}\ \overset{۲}{\bigcirc}\ \ldots\ \overset{۲}{\bigcirc}}_{n\ \text{عضو}} \qquad ۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲=۲^n$$

هر مجموعه‌ی n عضوی دارای زیرمجموعه‌های صفر عضوی (تهی)، ۱ عضوی و ... می‌باشد.

زیرمجموعه‌ی تهی یعنی $\binom{n}{۰}$ و زیرمجموعه‌های ۱ عضوی یعنی $\binom{n}{۱}$ و ...

و چون کل زیرمجموعه‌ها برابر ۲^n می‌باشد، بنابراین:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$