مثال: مقدار هر یک از حدود زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos \pi x}{x-۴\sqrt{x}+۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos(۴\pi-\pi x)}{(\sqrt{x}-۲)^{۲}}=\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{۱}{۲}\pi^{۲}(۴-x)^{۲}}{(\sqrt{x}-۲)^{۲}}$$

زیرا

$$\lim_{\alpha\to ۰}(۱-\cos\alpha)=\lim_{\alpha\to ۰}۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\lim_{\alpha\to ۰}\frac{۱}{۲}\alpha^{۲}$$

$$۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^{۲}\quad(\alpha\to ۰)$$

پس

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{\pi^{۲}}{۲}(x-۴)^{۲}}{(x-۴)^{۲}}\cdot(\sqrt{x}+۲)^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۲}\times ۱۶=۸\pi^{۲}$$

$$\text{۲)}\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{|\text{Sin}\,\pi x|}{۲-\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-\text{Sin}\,\pi x\,(۲+\sqrt{۲x})}{(۴-۲x)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{+\text{Sin}\,(۲\pi-\pi x)\times ۴}{۲(۲-x)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\pi\,(۲-x)\times ۴}{۲(۲-x)}=۲\pi$$