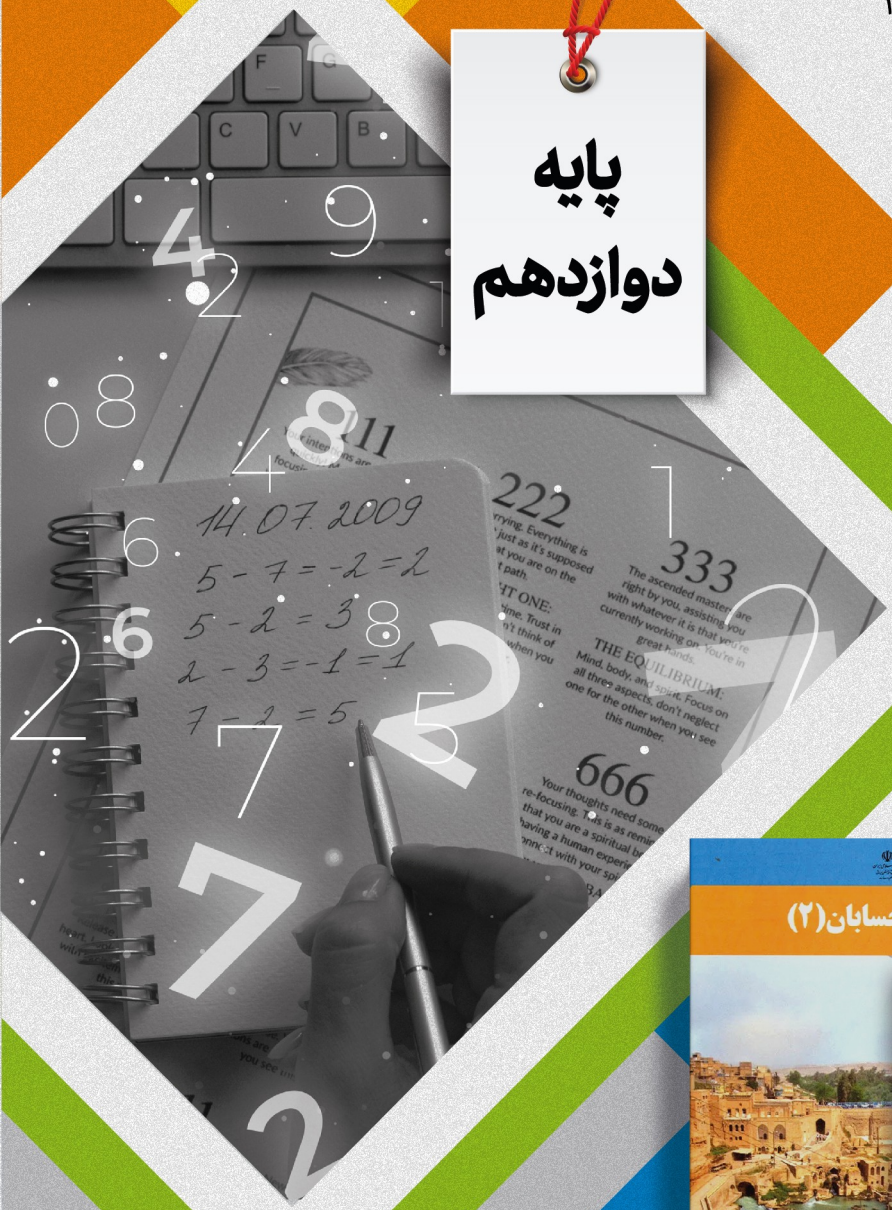
دفترچه پاسخ تشریحی

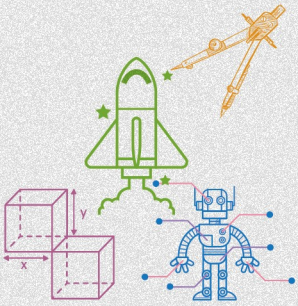
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون **رایگان** (سنجش آغازین) **۱۱ مهر** ۱۴۰۴

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

پایه دوازدهم





گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۴۰۴-۱۴۰۵

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

تذکرهای مهم

- داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند و...، با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

- **در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.**

- کارنامه‌های آزمون رایگان (سنجش آغازین) به‌صورت کامل، با فاصلهٔ زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیهٔ اعلام‌شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می‌گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.

داوطلب گرامی، شما می‌توانید با اسکن تصویر بالا به وسیلهٔ گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحهٔ اینستاگرام مؤسسه گزینه‌دو وارد شوید.

gozine2.ir

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۵، درس ۳)

در نقطه‌ای که دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند مختصات یکسان دارند.

$$\begin{cases} y_1(1) = -1 + b = 0 \\ y_2(1) = 1 + a - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 1 + a - 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

توجه داشته باشید روی محور x ها مقدار y برابر صفر است.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۴)

راه‌حل اول:

می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی به‌صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است، پس داریم:

$$t_5 + t_8 + t_{11} + t_{16} = (t_1 + 4d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 10d) + (t_1 + 15d) = 140$$

$$\Rightarrow 4t_1 + 36d = 140 \Rightarrow 4(t_1 + 9d) = 140 \Rightarrow t_1 + 9d = 35$$

$t_1 + 9d$ همان جملهٔ دهم است، پس:

$$t_{10} = 35$$

راه‌حل دوم:

چون جملهٔ دهم خواسته شده است، تمام جمله‌های دیگر دنباله را برحسب جملهٔ دهم می‌نویسیم:

$$t_5 + t_8 + t_{11} + t_{16} = (t_{10} - 5d) + (t_{10} - 2d) + (t_{10} + d) + (t_{10} + 6d) = 140 \Rightarrow 4t_{10} = 140 \Rightarrow t_{10} = \frac{140}{4} = 35$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)

نکته: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

نکته: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a^2 + b^2)$

بنابر نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\times(\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون $f(x)$ ابتدا در رابطهٔ $y = f(x)$، مقدار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم. سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$f^{-1}of^{-1}(-1) = f^{-1}(f^{-1}(-1)) = f^{-1}(-3) = -4$$

راه‌حل اول:

نکته: $f^{-1}of(x) = x$

$$fof(\alpha) = -4 \xrightarrow{\text{از طرفین } f^{-1} \text{ می‌گیریم}} f^{-1}(fof(\alpha)) = f^{-1}(-4)$$

$$\Rightarrow (f^{-1}of)(f(\alpha)) = f^{-1}(-4) \Rightarrow f(\alpha) = f^{-1}(-4)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = -\frac{9}{2} \Rightarrow 2\alpha + 5 = -\frac{9}{2} \Rightarrow 2\alpha = -\frac{19}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{19}{4}$$

راه‌حل دوم:

$$fof(\alpha) = f^{-1}of^{-1}(-1) \Rightarrow f(f(\alpha)) = -4 \Rightarrow f(2\alpha + 5) = -4$$

$$\Rightarrow 2(2\alpha + 5) + 5 = -4 \Rightarrow 4\alpha + 15 = -4 \Rightarrow \alpha = -\frac{19}{4}$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: در تابع وارون‌پذیر $f(x)$ داریم: $f^{-1}(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$f^{-1}(a)=b \Rightarrow f(b)=a \Rightarrow a=1+\frac{1}{b} \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض $b=f(a)$، پس $b=1+\frac{1}{a}$. با جایگذاری این مقدار در (*) داریم:

$$a=1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}} \Rightarrow a=1+\frac{1}{\frac{a+1}{a}} \Rightarrow a=1+\frac{a}{a+1} \Rightarrow a=\frac{2a+1}{a+1}$$

$$\Rightarrow a^2+a=2a+1 \Rightarrow a^2-a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: با فرض $a,b>0$ و $b\neq 1$ داریم: $\log_b a=c \Rightarrow a=b^c$

نکته: اگر $f^{-1}(\beta)=\alpha$، آنگاه $f(\alpha)=\beta$ و برعکس.

فرض کنیم $f^{-1}(2)=\alpha$، در این صورت داریم:

$$f(\alpha)=2 \Rightarrow \log_3(5\alpha+1)=2 \Rightarrow 5\alpha+1=3^2 \Rightarrow 5\alpha=8 \Rightarrow \alpha=\frac{8}{5}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: $\cos(-x)=\cos x \quad , \quad \sin(-x)=-\sin x$

نکته: $\cos(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\sin\alpha \quad , \quad \sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha$

با توجه به فرض داریم:

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+\beta$$

اکنون با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\cos(2\alpha-\beta)=\cos(\pi+2\beta-\beta)=\cos(\pi+\beta)=-\cos\beta$$

$$\cos(2\beta-\alpha)=\cos(2\beta-\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos(\beta-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta$$

بنابراین:

$$\cos(2\alpha-\beta)+\cos(2\beta-\alpha)=-\cos\beta+\sin\beta$$

پس گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

روش اول: باید داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(1-a+3)[2^+]=(4-a)\times 2=8-2a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=(1-a+3)[2^-]=(4-a)\times 1=4-a\\ f(1)=(1-a+3)[2]=8-2a\end{array}\right\} \Rightarrow 8-2a=4-a \Rightarrow a=4$$

روش دوم: تابع $g(x)=[2x]$ در $x=1$ ناپیوسته و تابع $h(x)=x^2-ax+3$ پیوسته است، بنابراین تابع $f(x)=h(x)g(x)$ زمانی در $x=1$ پیوسته است که داشته باشیم:

$$h(1)=0 \Rightarrow 1-a+3=0 \Rightarrow a=4$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)

نکته: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

به کمک نکته، صورت و مخرج را در عبارت مناسب ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times 7}+\sqrt[3]{7^2}}\times\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}{5-7}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}{-2}=\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}-\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)

نکته: $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \Rightarrow a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$

بنابر نکتهٔ فوق، می‌توان نوشت:

$$x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = (x+\frac{۱}{x})^۳ - ۳x\times\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x}) = (x+\frac{۱}{x})^۳ - ۳(x+\frac{۱}{x}) \quad (*)$$

پس برای محاسبهٔ حاصل عبارت $x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$ کافی است مقدار $x+\frac{۱}{x}$ را تعیین کنیم:

$$x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow[x\neq ۰]{\text{طرفین تقسیم بر } x} \frac{x^۲ + ۳x + ۱}{x} = ۰ \Rightarrow x + \frac{۱}{x} + ۳ = ۰ \Rightarrow x + \frac{۱}{x} = -۳$$

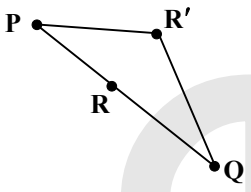
با جایگذاری $x+\frac{۱}{x} = -۳$ در (*) خواهیم داشت:

$$x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = (-۳)^۳ - ۳(-۳) = -۲۷ + ۹ = -۱۸$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

نکته: معادلهٔ خط گذرا از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$، عبارت است از: $y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$

برای آنکه طول $PR + RQ$ کمترین مقدار باشد، باید R روی خط PQ باشد؛ زیرا با توجه به نامساوی مثلث در شکل روبه‌رو داریم: $PR' + R'Q > PR + RQ$



با توجه به نکتهٔ بالا معادلهٔ خط گذرا از نقاط P و Q را می‌نویسیم:

$$y - ۲ = \frac{-۲-۲}{-۱-۴}(x-۴) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۴}{۵}(x-۴) \Rightarrow y = \frac{۴}{۵}x - \frac{۶}{۵}$$

برای اینکه نقطهٔ $R(۱, m)$ روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن در معادلهٔ خط صدق کند. بنابراین:

$$m = \frac{۴}{۵} - \frac{۶}{۵} = -\frac{۲}{۵}$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۵، درس ۳)

ابتدا برد تابع $y = ۴ - |x|$ را به‌دست می‌آوریم: $|x| \geq ۰ \Rightarrow -|x| \leq ۰ \xrightarrow{+۴} ۴ - |x| \leq ۴$

حال اگر از طرفین عبارت فوق جذر بگیریم، با توجه به اینکه اعداد منفی جذر ندارند، خواهیم داشت:

$$۰ \leq ۴ - |x| \leq ۴ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۴ - |x|} \leq ۲ \Rightarrow R_f = [۰, ۲]$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۳)

ابتدا عبارت را برحسب y یعنی $\frac{۱}{x-۱}$ مرتب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(\frac{x}{x-۱} - ۲)(۶ - \frac{۲x}{x-۱}) > ۰ \Rightarrow (\frac{x-۱+۱}{x-۱} - ۲)(۶ - \frac{۲x-۲+۲}{x-۱}) > ۰ \Rightarrow (۱ + \frac{۱}{x-۱} - ۲)(۶ - ۲ - \frac{۲}{x-۱}) > ۰ \Rightarrow (y-۱)(۴-۲y) > ۰$$

y		۱		۲	
کل عبارت	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow ۱ < y < ۲$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، مجموع ریشه‌ها برابر است با: $S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a}$

با توجه به صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{a+m}{b+m} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^۲ + m\times a = b^۲ + m\times b \Rightarrow a^۲ - b^۲ + m(a-b) = ۰ \Rightarrow (a-b)(a+b) + m(a-b) = ۰$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b+m) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a-b = ۰ \Rightarrow a = b \\ \text{یا} \\ a+b+m = ۰ \Rightarrow a+b = -m \end{cases} \quad (*)$$

a و b ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ + ۱۰x - ۷ = ۰$ هستند. با توجه به اینکه در این معادله $\Delta = ۱۵۶ > ۰$، پس دو ریشه متمایز هستند؛ یعنی $a \neq b$. با توجه به نکته، در این معادله مجموع ریشه‌ها برابر است با: $a + b = \frac{-۱۰}{۲} = -۵$

بنابراین با توجه به معادلهٔ (*) داریم:

$$a + b = -m \Rightarrow -m = -۵ \Rightarrow m = ۵$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

نکته: برای حل یک معادلهٔ گویا، ابتدا دو طرف تساوی را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. سپس معادلهٔ حاصل را حل می‌نماییم. در پایان قابل‌قبول بودن هر یک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم ماشین A به‌تنهایی این کار را در مدت زمان t_A (بر حسب ساعت)، ماشین B به‌تنهایی در مدت زمان t_B (بر حسب ساعت) و هر دو ماشین با هم در مدت زمان t (بر حسب ساعت) انجام دهد. در این صورت در مدت زمان یک ساعت، ماشین A به‌تنهایی $\frac{1}{t_A}$ کل کار، ماشین B به‌تنهایی $\frac{1}{t_B}$ کل کار و هر دو ماشین با هم $\frac{1}{t}$ کل کار را انجام می‌دهد. بنابراین: $\frac{1}{t}=\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}$

طبق فرض $t_B = t_A + 1$ و t برابر یک ساعت و دوازده دقیقه معادل $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ ساعت است. با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ بالا داریم:

$$\frac{1}{\frac{6}{5}}=\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_A+1} \Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_A+1} \Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{t_A+1+t_A}{t_A(t_A+1)} \Rightarrow 5t_A^2+5t_A=12t_A+6 \Rightarrow 5t_A^2-7t_A-6=0$$

$$\Rightarrow (5t_A+3)(t_A-2)=0 \xrightarrow{t_A>0} t_A=2$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

نکته: با فرض $a, b>0$ و $b\neq 1$ داریم: $\log_b a = c \Rightarrow a = b^c$

نکته: $\log_b a^n = n\log_b a$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\log_n 2+\log_n 4+\cdots+\log_n 2^n=\frac{n^2+n}{8} \Rightarrow \log_n 2+2\log_n 2+\cdots+n\log_n 2=\frac{n^2+n}{8}$$

$$\Rightarrow (1+2+\cdots+n)\log_n 2=\frac{n^2+n}{8} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}\log_n 2=\frac{n(n+1)}{8} \Rightarrow \log_n 2=\frac{1}{4} \Rightarrow n^{\frac{1}{4}}=2 \Rightarrow n=2^4=16$$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۲)

راه‌حل اول:

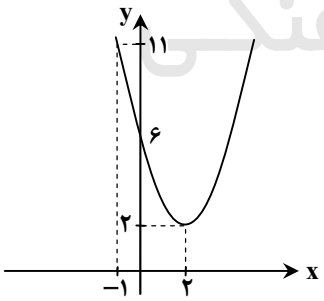
نکته: هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ در هر نقطهٔ دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطهٔ a برابر است.

با توجه به نکته، اگر $f(x)=x^2-4x+6$، حد تابع f در نقطهٔ $x=-1$ برابر است با: $f(-1)=(-1)^2-4(-1)+6=11$

ولی با توجه به اینکه تابع f داخل جزء صحیح قرار دارد، اهمیت دارد که به‌ازای $(-1)^+$ مقدار تابع از ۱۱ بیشتر است یا کمتر؛ پس داریم:

$$\begin{cases} x\to(-1)^+ : x>-1 \Rightarrow x^2<1 \\ x\to(-1)^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow -4x<4 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x<5 \Rightarrow x^2-4x+6<11$$

بنابراین حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left[x^2-4x+6\right]$ برابر $\left[11^-\right]=10$ است.



راه‌حل دوم:

نمودار $f(x)=x^2-4x+6$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:

مشخص است که تابع f در همسایگی راست منفی یک کمی از یازده کمتر است و جزء صحیح آن برابر ۱۰ است.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۱)

طبق فرض $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود است، پس باید در ابتدا a را چنان بیابیم که نمودار تابع برای $x>2$ و $x<2$ در یک نقطه به هم برسند؛ یعنی باید مقدار $y=x+a$ به ازای $x=2$ برابر ۵ باشد:

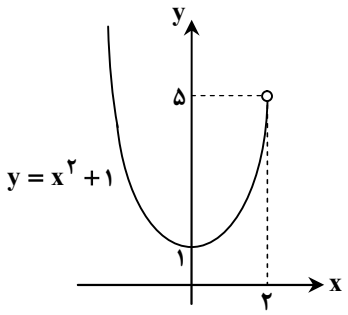
$$2+a=5 \Rightarrow a=3$$

در این صورت داریم $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$. از طرفی طبق فرض داریم:

$$f(2)+\lim_{x\to 2} f(x)=12 \Rightarrow f(2)+5=12$$

$$\Rightarrow f(2)=7 \Rightarrow 3b+1=7 \Rightarrow b=2$$

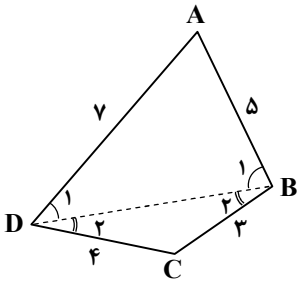
بنابراین: $a+b=3+2=5$



۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: در هر مثلث با دو ضلع نابرابر، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

قطر BD را رسم کرده و با توجه به نکتهٔ بالا در شکل روبه‌رو داریم:



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABD}: AD > AB \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{D}_1 \\ \overset{\triangle}{BCD}: CD > BC \Rightarrow \hat{B}_2 > \hat{D}_2 \end{cases}$$

طرفین دو نامساوی فوق را با هم جمع می‌کنیم:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 > \hat{D}_1 + \hat{D}_2$$

بنابراین:

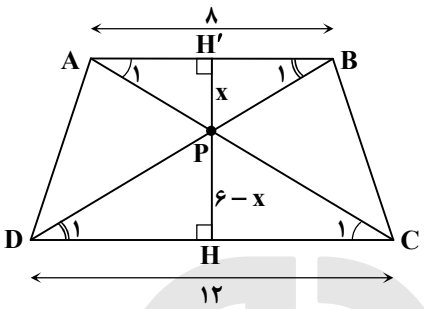
$$\hat{B} > \hat{D}$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها با نسبت تشابه برابر است.

نکته: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابهند.

به‌کمک قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:



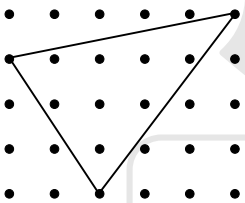
$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{PAB} \overset{(zz)}{\sim} \overset{\triangle}{PDC}$$

از تشابه دو مثلث، مطابق شکل و با توجه به نکته، داریم:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{PH'}{PH} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{x}{۶-x} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{x}{۶-x} \Rightarrow ۳x = ۱۲ - ۲x \Rightarrow ۵x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴ \Rightarrow PH = ۶ - ۲/۴ = ۳/۶$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای با b نقطهٔ مرزی و i نقطهٔ درونی برابر است با: $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$



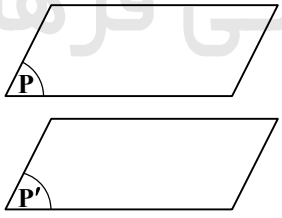
با توجه به نکتهٔ بالا، واضح است که تأثیر تعداد نقاط درونی (i) برای افزایش مساحت از تأثیر تعداد نقاط مرزی (b) بیشتر است (چون b ضریب $\frac{۱}{۲}$ دارد). همچنین می‌دانیم تعداد نقاط مرزی از ۳ کمتر نمی‌شود، پس بیشترین مقدار ممکن برای مساحت این چندضلعی شبکه‌ای به‌ازای $b = ۳$ و $i = ۸$ به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۳}{۲} + ۸ - ۱ = ۸/۵$$

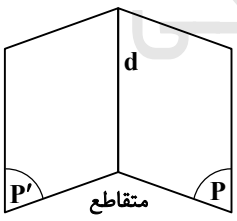
به‌عنوان مثال چندضلعی شبکه‌ای روبه‌رو دارای خاصیت موردنظر است.

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۱)

نکتهٔ ۱: دو صفحه متمایز در فضا نسبت به هم، موازی یا متقاطع هستند.



موازی

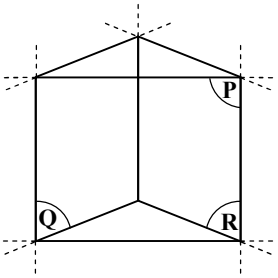


(خط d، فصل مشترک دو صفحه)

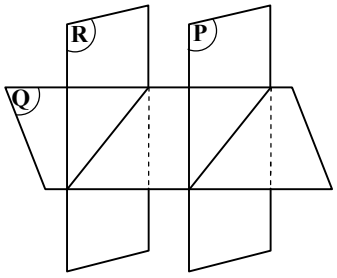
نکتهٔ ۲: اگر دو صفحه برهم منطبق باشند، آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

نکتهٔ ۳: دو صفحهٔ متقاطع، در یک خط، مشترک‌اند که به آن، فصل مشترک دو صفحهٔ متقاطع می‌گوییم.

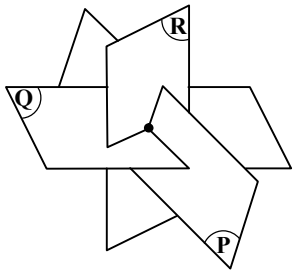
با توجه به نکات، یکی از حالات زیر ممکن است به‌وجود بیاید.



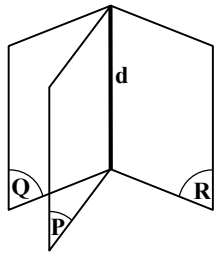
«سه صفحه با هم نقطه مشترک ندارند»



«سه صفحه با هم نقطه مشترک ندارند»



«سه صفحه در یک نقطه مشترک‌اند»



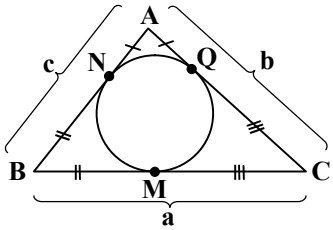
«سه صفحه در یک خط مشترک‌اند»

پس تعداد نقاط مشترک سه صفحه می‌تواند صفر، یک یا بی‌شمار باشد.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳)

نکته: اگر نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن، نقاط M، N و Q باشند، مطابق شکل، داریم:



$$\begin{cases} AN = AQ = P - a \\ BN = BM = P - b \\ CQ = CM = P - c \end{cases}$$

که در آن، a، b و c، طول اضلاع مثلث و P، نصف محیط مثلث است.

با توجه به نکته، داریم: $CM = CQ = P - AB = \frac{۱۶}{۲} - ۵ = ۳$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲ و فصل ۲، درس ۱)

نکتهٔ ۱: در تجانس به مرکز نقطهٔ ثابت O و نسبت $k > ۰$، اگر نقطهٔ A' مُجانس نقطهٔ A در صفحه باشد:

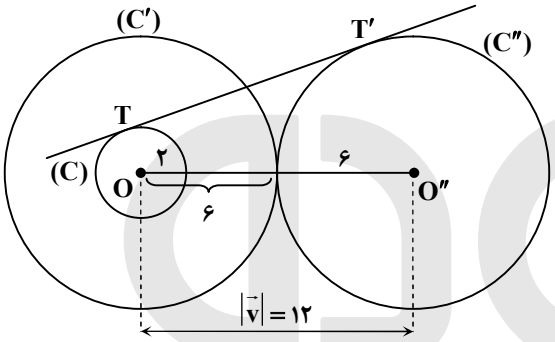
۱) A و A' و O روی یک خط راست بوده و A و A' در یک طرف O هستند.

۲) $OA' = k \cdot OA$

نکتهٔ ۲: در انتقال تحت بردار $\vec{v}$ اگر A' تصویر نقطهٔ A در صفحه باشد، داریم: $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

نکتهٔ ۳: اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ برابر است با: $\sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲}$

ابتدا با توجه به نکات ۱ و ۲، دایره‌های C' و C'' را مطابق شکل رسم می‌کنیم. واضح است که دایرهٔ C' به مرکز O و شعاع ۶ است، زیرا با توجه به نکتهٔ ۱، داریم: $R' = ۳ \times R = ۳ \times ۲ = ۶$



همچنین دایرهٔ C'' دایره‌ای است به مرکز O'' و شعاع ۶ که با دایرهٔ C مماس خارج است و طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر ۱۲ است. زیرا از طرفی انتقال طولپاست و از طرفی دیگر با توجه به نکتهٔ ۲، داریم:

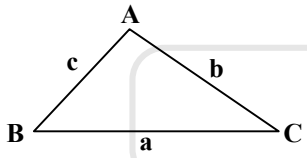
$\overrightarrow{OO'} = \vec{v} \Rightarrow OO' = ۱۲$

و در نهایت با توجه به نکتهٔ ۳، طول مماس مشترک خارجی دو دایره C و C'' (پاره‌خط TT')، برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO''^۲ - (R - R'')^۲} = \sqrt{۱۲^۲ - (۲-۶)^۲} = \sqrt{۱۴۴ - ۱۶} = \sqrt{۱۲۸} = \sqrt{۲ \times ۶۴} = ۸\sqrt{۲}$$

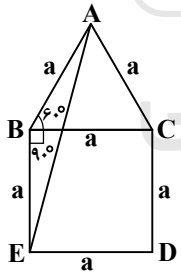
۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۲)

نکته (قضیهٔ کسینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \quad b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\hat{B} \quad c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\hat{C}$$

با توجه به نکته و مطابق شکل، در مثلث ABE داریم:



$$AE^۲ = a^۲ + a^۲ - ۲(a)(a)\cos۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow AE^۲ = ۲a^۲ - ۲a^۲(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\Rightarrow AE^۲ = ۲a^۲ + a^۲\sqrt{۳}$$

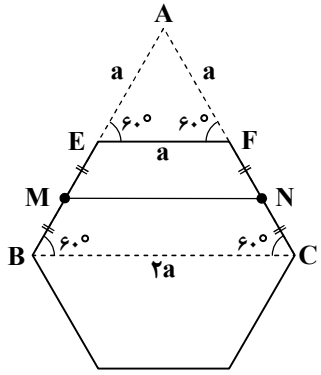
$$\Rightarrow AE^۲ = a^۲(۲ + \sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AE = a\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ و طول قطر بزرگ برابر $۲a$ است.

امتداد BE و CF در A متقاطع‌اند، داریم:



$$\overset{\Delta}{AEF}: \hat{E} = \hat{F} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow AF = AE = EF = a$$

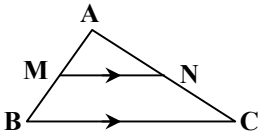
در مثلث ABC می‌توانیم قضیهٔ تالس را بنویسیم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{a}{BC} = \frac{a}{۲a} \Rightarrow BC = ۲a$$

در ذوزنقه EFCB که وسط‌های دو ساق به هم وصل شده‌اند، MN موازی دو قاعده است، پس دوباره در مثلث ABC قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{۲a} = \frac{a + \frac{a}{۲}}{۲a} = \frac{\frac{۳}{۲}a}{۲a} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow MN = \frac{۳a}{۲}$$

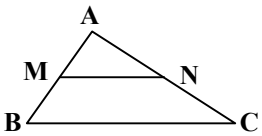
۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۱)



نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): در مثلث ABC اگر $MN \parallel BC$، آنگاه:

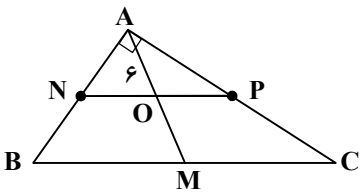
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

نکته (عکس قضیهٔ تالس): در مثلث ABC، اگر پاره‌خط MN روی اضلاع AB و AC پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند $(\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC})$، آنگاه: $MN \parallel BC$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد وتر، نصف وتر است.

طبق فرض N و P وسط‌های AB و AC هستند، پس: $\frac{AN}{AB}=\frac{AP}{AC}=\frac{1}{2}$ (*)



بنابراین از عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم $NP \parallel BC$، پس $OP \parallel MC$. در نتیجه با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AMC داریم:

$$\frac{AO}{AM}=\frac{AP}{AC}\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\xrightarrow{AO=6}\frac{6}{AM}=\frac{1}{2}\Rightarrow AM=12$$

بنابراین طول میانهٔ وارد بر وتر BC برابر ۱۲ است، پس طول وتر برابر است با:

$$BC=2AM=24$$

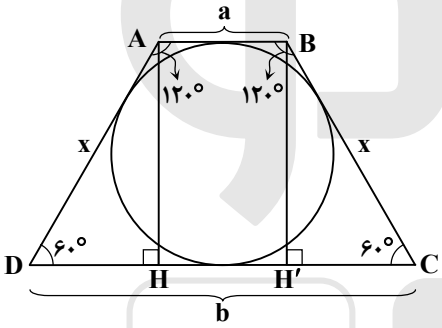
۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: یک ذوزنقه محاطی است، اگر و فقط اگر متساوی‌الساقین باشد.

نکتهٔ ۲: در هر چهارضلعی محاطی، زوایای مقابل مکمل‌اند.

نکتهٔ ۳: در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر است با مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر.

با توجه به نکتهٔ ۱، ذوزنقهٔ موردنظر، محاطی است و با توجه به نکتهٔ ۲ و اطلاعات مسئله، اگر فرض کنیم $\hat{C}=\hat{D}=\alpha$، آنگاه: $\hat{A}=\hat{B}=2\alpha$



و داریم: $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 2\alpha+\alpha=180^\circ\Rightarrow 3\alpha=180^\circ\Rightarrow\alpha=60^\circ$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=\hat{D}=60^\circ\\ \hat{A}=\hat{B}=120^\circ\end{cases}$$

حال با توجه به نکتهٔ ۳ و مطابق شکل داریم: $x+x=a+b\Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$ «۱»

همچنین چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است، پس داریم:

$$DH=CH'=\frac{DC-HH'}{2}=\frac{b-a}{2}\quad «2»$$

و حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH خواهیم داشت:

$$\cos 60^\circ=\frac{DH}{AD}\xrightarrow[«2»]{«1»}\frac{1}{2}=\frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{b+a}{2}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{b-a}{b+a}\Rightarrow 2b-2a=b+a\Rightarrow b=3a\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

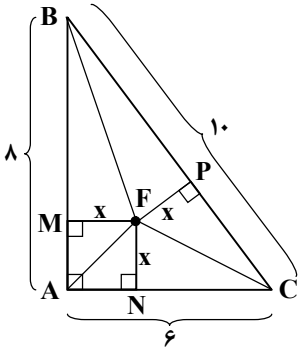
نکته: محل همرسی نیمسازهای هر مثلث، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

یادآوری:

۱) مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع.

۲) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب اضلاع قائمه.

۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر (فیثاغورس).



ابتدا به‌کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم: $BC=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

پس با توجه به نکته، داریم: $FM=FN=FP=x$

از آنجایی که در چهارضلعی $AMFN$ سه زاویهٔ قائمه داریم و دو ضلع مجاور مساوی هستند، پس این چهارضلعی مربع است.

با توجه به شکل داریم:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta FAB}+S_{\Delta FAC}+S_{\Delta FBC}\Rightarrow\frac{6\times 8}{2}=\frac{1}{2}\times 8x+\frac{1}{2}\times 6x+\frac{1}{2}\times 10x\Rightarrow 24=4x+3x+5x\Rightarrow 24=12x\Rightarrow x=2$$

بنابراین مساحت مربع $AMFN$ برابر است با: $S_{AMFN}=2^2=4$

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (فصل ۴، درس ۲)

نکته: انحراف معیار برآورد میانگین یک نمونهٔ nتایی را با $\sigma_{\bar{x}}$ نمایش داده و برابر است با $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ که در آن σ انحراف معیار جامعه است.

با توجه به نکته و به‌کمک اطلاعات مسئله، داریم:

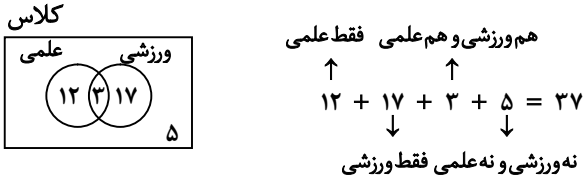
$$n = ۴۰۰۰۰ \ , \ \sigma = ۸$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۸}{\sqrt{۴۰۰۰۰}} = \frac{۸}{۲۰۰} = \frac{۱}{۲۵}$$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۲)

راه‌حل اول:

به‌کمک نمودار ون روبه‌رو داریم:



هم‌ورزشی و هم‌علمی فقط علمی

$$۱۲ + ۱۷ + ۳ + ۵ = ۳۷$$

نه‌ورزشی و نه‌علمی فقط ورزشی

راه‌حل دوم:

نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مطابق نکته داریم:

$$n(A \cap B) = ۳ \quad , \quad \text{علمی}: n(B) = ۱۵ \quad , \quad \text{ورزشی}: n(A) = ۲۰$$

$$n(A \cup B) = ۲۰ + ۱۵ - ۳ = ۳۲$$

$$\text{تعداد کل اعضای کلاس} = n(A \cup B) + ۵ = ۳۲ + ۵ = ۳۷$$

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

نکتهٔ ۲: $B - A = B \cap A'$

نکتهٔ ۳: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ , \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

نکتهٔ ۴: $A \cup A' = U$

نکتهٔ ۵: $A \cap U = A$

ابتدا با توجه به نکات ۲ تا ۵، سمت چپ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

طبق فرض، این مجموعه برابر B است، بنابراین با توجه به نکتهٔ ۱ داریم:

$$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$$

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۳)

نکته: $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$

با توجه به نکته واضح است که باید $A = B$ باشد، یعنی:

$$\{۱۰, y - ۴, z + ۲\} = \{۸, -۴, x - ۲\}$$

طبیعی است که عضو $x - ۲$ از مجموعهٔ B فقط می‌تواند با عضو ۱۰ از مجموعهٔ A برابر باشد، پس:

$$x - ۲ = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۲$$

و در ادامه، دو حالت می‌تواند وجود داشته باشد:

$$۱) \begin{cases} y - ۴ = ۸ \Rightarrow y = ۱۲ \\ z + ۲ = -۴ \Rightarrow z = -۶ \end{cases} \Rightarrow x + y - z = ۱۲ + ۱۲ + ۶ = ۳۰$$

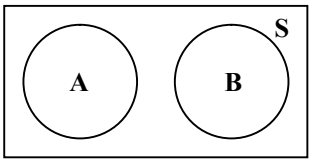
$$۲) \begin{cases} y - ۴ = -۴ \Rightarrow y = ۰ \\ z + ۲ = ۸ \Rightarrow z = ۶ \end{cases} \Rightarrow x + y - z = ۱۲ + ۰ - ۶ = ۶$$

و اختلاف این دو عدد برابر است با:

$$۳۰ - ۶ = ۲۴$$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

نکتهٔ ۱: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:



۱) $A \cap B = \varnothing$

۲) $A - B = A$

۳) $B - A = B$

۴) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

نکتهٔ ۲: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکتهٔ ۳: $P(A') = ۱ - P(A)$

نکتهٔ ۴: $P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B)$

با توجه به نکتهٔ ۱، داریم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) = ۰/۲$$
$$P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) = ۰/۳$$

و با توجه به نکات ۲، ۳ و ۴، خواهیم داشت:

$$P(A' \mid B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{۱ - P(B)} = \frac{۱ - (P(A) + P(B))}{۱ - ۰/۳} = \frac{۱ - (۰/۲ + ۰/۳)}{۰/۷} = \frac{۱ - ۰/۵}{۰/۷} = \frac{۰/۵}{۰/۷} = \frac{۵}{۷}$$

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

نکتهٔ ۱: اگر پیشامدهای $A_۱$ تا A_n، فضای نمونه‌ای S را افراز کنند، طبق قانون احتمال کل برای پیشامد دلخواه A، داریم:

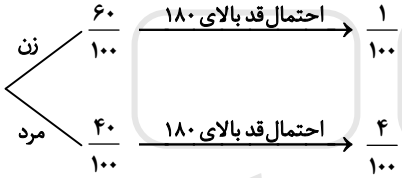
$$P(A) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i) \times P(A \mid A_i)$$

نکتهٔ ۲: اگر پیشامدهای $A_۱$ تا A_n، فضای نمونه‌ای S را افراز کرده باشند، طبق قاعدهٔ بیز، داریم:

$$P(A_i \mid A) = \frac{P(A_i) \times P(A \mid A_i)}{P(A)}$$

که در آن $P(A)$ به‌کمک قانون احتمال کل به‌دست می‌آید.

ابتدا به‌کمک نکتهٔ ۱، احتمال اینکه قد کارمند انتخابی بیشتر از ۱۸۰ باشد را حساب می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{قد بالای ۱۸۰}) = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۱۰۰}$$

و اینک به‌کمک نکتهٔ ۲، داریم:

$$P(\text{زن} \mid \text{قد بالای ۱۸۰}) = \frac{\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰}}{\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۱۰۰}} = \frac{۶ \times ۱}{۶ \times ۱ + ۴ \times ۴} = \frac{۶}{۲۲} = \frac{۳}{۱۱}$$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۲)

نکتهٔ ۱: اگر همهٔ داده‌ها را در عدد حقیقی a ضرب کنیم، میانگین، میانه و مد نیز در عدد a ضرب می‌شوند و اگر همهٔ داده‌ها را با عدد حقیقی b جمع کنیم، میانگین، میانه و مد نیز با عدد b جمع می‌شوند.

نکتهٔ ۲: به داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد، مُد می‌گویند.

با توجه به نکتهٔ ۱، اگر مُد داده‌ها را با M نمایش دهیم، با سه برابر کردن و اضافه کردن ۲ واحد به داده‌ها، مُد داده‌ها برابر $۳M + ۲$ خواهد شد و داریم:

$$۳M + ۲ = ۲۹ \Rightarrow ۳M = ۲۷ \Rightarrow M = ۹$$

اینک با توجه به نکتهٔ ۲، اگر بخواهیم عدد ۹ مُد داده‌های اولیه باشد، از آنجایی که دو دادهٔ ۵، دو دادهٔ ۷ و یک دادهٔ ۹ داریم، پس داده‌های $k^۲ - ۷$ و $k + ۵$ نیز باید برابر ۹ باشند تا فراوانی دادهٔ ۹ از همه بیشتر شود.

$$\left.\begin{array}{l} k^۲ - ۷ = ۹ \Rightarrow k^۲ = ۱۶ \Rightarrow k = \pm ۴ \\ k + ۵ = ۹ \Rightarrow k = ۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = ۴$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۴، درس ۲)

نکتهٔ ۱: میانگین و انحراف‌معیار n دادهٔ x_1، x_2، x_3، ... و x_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\text{میانگین}: \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad ،\text{انحراف‌معیار}: \sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

نکتهٔ ۲: اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که در آن μ میانگین جامعه، $\bar{x}$ میانگین نمونه و σ انحراف‌معیار جامعه است.

نکتهٔ ۳: خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه.

با توجه به نکتهٔ ۱، ابتدا انحراف‌معیار داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{7+6+6+5+4+3+2+2+1}{9}=\frac{36}{9}=4$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(7-4)^2+2(6-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+2(2-4)^2+(1-4)^2}{9}}=\sqrt{\frac{9+8+1+0+1+8+9}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}$$

$$=\sqrt{4}=2$$

حال با توجه به نکتهٔ ۲، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی را برای میانگین جامعه، حساب می‌کنیم:

$$4-\frac{2\times 2}{\sqrt{9}} \le \mu \le 4+\frac{2\times 2}{\sqrt{9}} \Rightarrow 4-\frac{4}{3} \le \mu \le 4+\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} \le \mu \le \frac{16}{3}$$

و در نهایت، با توجه به نکتهٔ ۳ می‌دانیم که خط فقر، نصف میانگین جامعه است، پس:

$$\frac{\frac{8}{3}}{2} \le \text{خط فقر} \le \frac{\frac{16}{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} \le \text{خط فقر} \le \frac{8}{3}$$

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

نکتهٔ ۱: گزارهٔ عطفی $p \wedge q$، زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند.

نکتهٔ ۲: گزارهٔ فصلی $p \vee q$، زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند.

نکتهٔ ۳: گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد و در مابقی حالات درست است.

نکتهٔ ۴: در محاسبهٔ احتمال شرطی، شرط مسئله را به‌عنوان فضای نمونه‌ای کاهش‌یافته در نظر گرفته و احتمال پیشامد موردنظر را با فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ به‌دست می‌آوریم.

با توجه به نکات ۱ و ۲ در سه حالت زیر، گزارهٔ $r \wedge (p \vee q)$ درست است:

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv T\ ,\ p\equiv T\ ,\ q\equiv T \\ r\equiv T\ ,\ p\equiv T\ ,\ q\equiv F \\ r\equiv T\ ,\ p\equiv F\ ,\ q\equiv T \end{array}\right\} \Rightarrow n(S)=3$$

و با توجه به نکتهٔ ۳، از این سه حالت، در دو حالت زیر گزارهٔ $p \Rightarrow (q \wedge r)$ درست است:

$$\left.\begin{array}{l} p\equiv T\ ,\ q\equiv T\ ,\ r\equiv T \\ p\equiv F\ ,\ q\equiv T\ ,\ r\equiv T \end{array}\right\} \Rightarrow n(A)=2$$

و در نهایت با توجه به نکتهٔ ۴، خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{3}$$

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

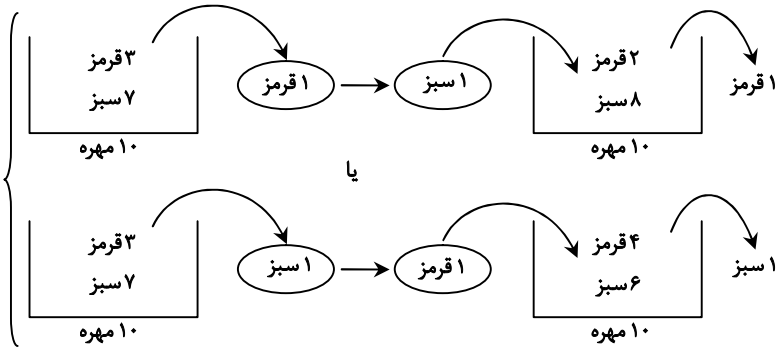
نکتهٔ ۱: فرض کنید B_1 و B_2 و... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)\times P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

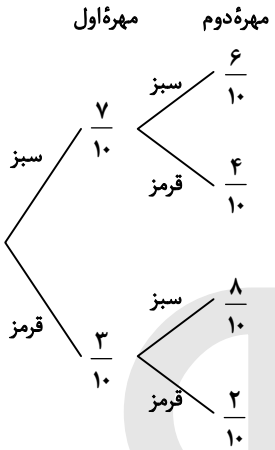
که در آن مقدار $P(A)$ از طریقِ قانونِ احتمال کل (وابستگی A به B_iها) به‌دست می‌آید و $P(B_i)\times P(A \mid B_i)$ یکی از حالت‌های محاسبه‌شده در قانون احتمال کل است.

نکتهٔ ۲: در حل مسائل قانون احتمال کل، برای پرهیز از استفاده از فرمول و ساده‌تر شدنِ راه‌حل، مسئله را به‌صورت نمودار درختی رسم کرده و احتمال هر شاخه را روی آن می‌نویسیم و در نهایت، احتمال شاخه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

طبق فرض سؤال چون دو مهره خارج‌شده هم‌رنگ هستند، دو حالت زیر را داریم:



اگر A را پیشامد هم‌رنگ بودن هر دو مهره و پیشامدهای B_1 و B_2 را به‌ترتیب سبز بودن هر دو مهره و قرمز بودنِ هر دو مهره در نظر بگیریم، با توجه به اطلاعات مسئله و نکتهٔ ۲، خواهیم داشت:



$$\xrightarrow{\text{نکتهٔ ۱}} P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}=\frac{42}{48}=\frac{7}{8}$$

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس‌های ۲ و ۳)

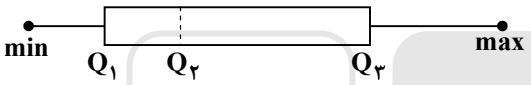
نکتهٔ ۱:

■ دادهٔ وسط در میان داده‌های مرتب‌شده صعودی را میانه می‌گوییم و با Q_2 نمایش می‌دهیم.

■ اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر است با دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر است با میانگین دو دادهٔ وسط.

■ میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها را با Q_1 نمایش داده و چارک اول نامیده و میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها را با Q_3 نمایش داده و چارک سوم می‌نامیم.

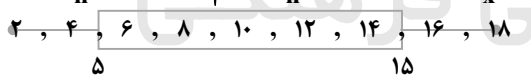
نکتهٔ ۲: نمودار جعبه‌ای، پراکندگی داده‌ها را بر اساس پنج معیار کوچک‌ترین داده، چارک اول، میانه، چارک سوم و بزرگ‌ترین داده به‌صورت روبه‌رو نمایش می‌دهد:



نکتهٔ ۳: میانگین، انحراف‌معیار و ضریب تغییرات n دادهٔ آماری x_1 تا x_n را به‌ترتیب با $\bar{x}$، σ و CV نمایش داده و برابرند با:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\ ,\ \sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}\ ,\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

با توجه به نکات ۱ و ۲، نمودار جعبه‌ای داده‌ها به‌صورت روبه‌رو است:



داده‌های ۱۴,۱۲,۱۰,۸,۶ داخل جعبه و داده‌های ۱۸,۱۶,۴,۲ خارج جعبه قرار دارند.

اینک با توجه به نکتهٔ ۳، ضریب تغییرات داده‌های خارج جعبه و انحراف‌معیار داده‌های داخل جعبه را محاسبه می‌کنیم.

داده‌های داخل جعبه: ۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴ $\Rightarrow \bar{x}=\frac{50}{5}=10$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(6-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(14-10)^2}{5}}=\sqrt{\frac{16+4+0+4+16}{5}}=\sqrt{\frac{40}{5}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

داده‌های خارج جعبه: ۲,۴,۱۶,۱۸ $\Rightarrow \bar{x}=\frac{40}{4}=10$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(2-10)^2+(4-10)^2+(16-10)^2+(18-10)^2}{4}}=\sqrt{\frac{64+36+36+64}{4}}=\sqrt{\frac{200}{4}}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و در نهایت نسبت انحراف‌معیار داده‌های داخل جعبه به ضریب تغییرات داده‌های خارج جعبه برابر است با:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$$

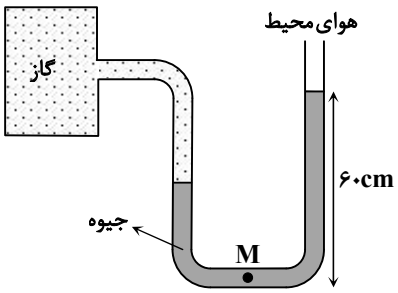
فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

$$|\bar{E}| = \left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \text{ولت} = \frac{\text{وبر}}{\text{ثانیه}} \Rightarrow \text{وبر} = \text{ثانیه}\times\text{ولت}$$

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)



با باز شدن شیر S، چون فشار پیمانه‌ای مخزن $۲۰cmHg$ است و ضمناً درون لولهٔ U شکل جیوه است، باید اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخهٔ لوله برابر $۲۰cm$ شود. ازاین‌رو جیوه در شاخهٔ سمت چپ $۱۰cm$ پایین آمده و در شاخهٔ سمت راست $۱۰cm$ بالا می‌رود. به این ترتیب نقطهٔ M در عمق $۵۰+۱۰=۶۰cm$ از سطح آزاد جیوه خواهد بود و فشار آن برابر است با:

$$P_M = P_\circ + \rho gh = ۷۰cmHg + ۶۰cmHg = ۱۳۰cmHg$$

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

اگر مساحت مقطع ظرف در قسمت بالایی و پایینی را به‌ترتیب با $A_۱$ و $A_۲$ نمایش دهیم، با توجه به آنکه شعاع قسمت پایین ۳ برابر شعاع قسمت بالا است، داریم:

$$A_۱ = \frac{۱}{۹}A_۲$$

$$A_۲\times۲ = A_۱\times h \Rightarrow A_۲\times۲ = \frac{۱}{۹}A_۲\times h \Rightarrow h = ۱۸cm$$

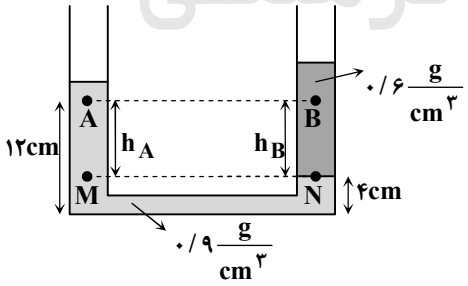
تغییر ارتفاع کل آب : $\Delta h = ۱۸-۲ = ۱۶cm$

$$\Delta P = \rho g\times\Delta h = ۱۰۰۰\times۱۰\times۰/۱۶ = ۱۶۰۰Pa$$

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

وقتی جیوه از نقطهٔ M به اندازهٔ $۲cm$ پایین برود، در طرف دیگر لوله به اندازهٔ $۲cm$ بالا می‌آید و اختلاف سطح جیوه در دو طرف لوله برابر با $۴cm$ می‌شود. از طرفی بالای جیوه در شاخهٔ سمت راست فشار هوا نیز وارد می‌شود، پس فشار مطلق ریهٔ شخص باید $(۷۵+۴)cmHg$ و فشار پیمانه‌ای $۴cmHg$ باشد.

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_A gh_A + P_A = \rho_B gh_B + P_B$$

$$۰/۹\times۱۰^۳\times۱۰\times(۱۲-۴)\times۱۰^{-۲} + P_A = ۰/۶\times۱۰^۳\times۱۰\times(۱۲-۴)\times۱۰^{-۲} + P_B$$

$$۹۰\times۸ + P_A = ۶۰\times۸ + P_B \Rightarrow P_B - P_A = ۲۴۰Pa$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$v_۲ = v_۱ - ۳$$

$$K_۲ = K_۱ - ۲۴$$

$$K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \Rightarrow K_۱ - ۲۴ = \frac{۱}{۲}m(v_۱-۳)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۴\times v_۱^۲ - ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times۴\times(v_۱-۳)^۲ \Rightarrow ۲v_۱^۲ - ۲۴ = ۲(v_۱-۳)^۲$$

$$v_۱^۲ - (v_۱-۳)^۲ = ۱۲ \Rightarrow v_۱^۲ - v_۱^۲ + ۶v_۱ - ۹ = ۱۲ \Rightarrow v_۱ = ۳/۵\frac{m}{s}$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

کار برایند نیروها برابر مجموع کار نیروهای وارد بر توپ است. دو نیروی وزن و نیروی پای فوتبالیست به توپ وارد می‌شوند. چون جابه‌جایی توپ افقی است، کار نیروی وزن برابر صفر است، بنابراین:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{فوتبالیست}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow W_{\text{فوتبالیست}} = \frac{1}{2}\times 0/4\times 20^2 - \frac{1}{2}\times 0/4\times 20^2 = 0$$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}mv_1^2 = 26 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 1\times 100 = 26 + \frac{1}{2}\times 1\times v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 48 \Rightarrow v_2 = 4\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{موتور}} + W_{\text{مقاوم}} + \cancel{W_{\text{وزن}}}^{\,0} + \cancel{W_{\text{عمود بر سطح}}}^{\,0} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow W_{\text{موتور}} - (\frac{1}{4}W_{\text{موتور}}) = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) \Rightarrow \frac{3}{4}W_{\text{موتور}} = \frac{1}{2}\times 1000\times(900-0) \Rightarrow \frac{3}{4}W_{\text{موتور}} = 450000$$

$$\Rightarrow W_{\text{موتور}} = 600000 = 600\,kJ$$

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow \bar{P} = \frac{600\,kJ}{10\,s} = 60\,kW$$

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل‌های ۳ و ۴)

$$W_f = \Delta E = (U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\times m\times(40000 - 90000) = \frac{-50000\,m}{2} = -25000\,m$$

گرمای داده شده به گلوله : $Q = 25000\,m\times\frac{1}{2} = 12500\,m$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 12500\,m = m\times 125\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{12500}{125} = 100^\circ C$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

ابعاد فضای خالی با همان ضریب انبساط طولی برنج رشد می‌کند:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T \Rightarrow \Delta L = 2\times 10^{-5}\times 100\times 100 = 0/2\,mm$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L = 100 + 0/2 = 100/2\,mm$$

تذکر: در رابطهٔ $\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$، اگر L_1 را بر حسب mm جای‌گذاری کنیم، ΔL نیز بر حسب میلی‌متر به‌دست می‌آید.

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۴)

اگر مقدار اولیهٔ آب در ظرف m' باشد، می‌توان نوشت:

حالت اول: $m'c(50-30) + mc(50-\theta) = 0 \Rightarrow m'(20) + m(50-\theta) = 0 \Rightarrow 20m' + 50m - m\theta = 0$ (الف)

حالت دوم: $(m+m')c(60-50) + mc(60-\theta) = 0 \Rightarrow (m+m')\times 10 + m(60-\theta) = 0 \Rightarrow 10m' + 70m - m\theta = 0$ (ب)

(الف) و (ب) $\Rightarrow 20m' + 50m = 10m' + 70m \Rightarrow 10m' = 20m \Rightarrow m' = 2m$

جای‌گذاری در رابطهٔ (الف): $20\times(2m) + 50m = m\theta \Rightarrow 40m + 50m = m\theta \Rightarrow \theta = 90^\circ C$

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۴)

با توجه به گزینه‌ها معلوم می‌شود که مقداری از یخ هنوز به آب تبدیل نشده است؛ لذا مراحل تعادل گرمایی به‌صورت زیر است:

یخ $-20^\circ C$ $\xleftarrow{Q_2}$ یخ صفر $\xleftarrow{Q_F}$ آب صفر $\xrightarrow{Q_1}$ آب $10^\circ C$

$$Q_1 + Q_2 + Q_F = 0$$

از سوی دیگر $c_{\text{آب}} = 4200\,\frac{J}{kg.^\circ C}$ و $c_{\text{یخ}} = \frac{1}{2}c_{\text{آب}}$ و $L_F = 80\times 4200\,\frac{J}{kg}$ و اگر طرفین را بر ۴۲۰۰ ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$420\times 1\times(-10) + 100\times(0/5)\times(20) + m\times 80 = 0 \Rightarrow -4200 + 1000 + 80m = 0 \Rightarrow m = 40\,g$$ مقدار یخ آب شده

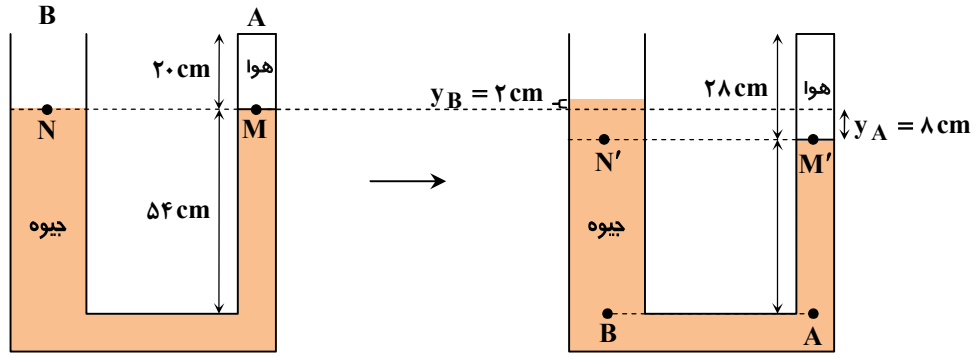
$$\Rightarrow m' = 100 - 40 = 60\,g$$ مقدار یخ باقی‌مانده

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل‌های ۲ و ۴)

$$\begin{cases} A = \pi R^2 \\ R_B = 2R_A \end{cases} \Rightarrow A_B = 4A_A$$

حجم جیوهٔ جابه‌جا شده در دو شاخه باید برابر هم باشد.

$$\Delta V_A = \Delta V_B \Rightarrow A_A y_A = A_B y_B \Rightarrow A_A \times y_A = 4A_A \times 2 \Rightarrow y_A = 8cm$$



$$P_M = P_N \Rightarrow P_{هوا} = 70cmHg \qquad P_{M'} = P_{N'} \Rightarrow P_{هوا} = 70 + 10 = 80cmHg$$

برای هوای محبوس در دو حالت داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{70 \times A_A \times 20}{300} = \frac{80 \times A_A \times 28}{T_2} \Rightarrow T_2 = 480K$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 480 - 300 = 180K \Rightarrow \Delta\theta = 180°C$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$$

برای بیشینهٔ فشار باید دما بیشینه و حجم کمینه و برای کمینهٔ فشار باید دما کمینه و حجم بیشینه باشد؛ بنابراین:

$$P_{min} = P_b \ , \ P_{max} = P_d \qquad \frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{T_d}{T_b} \times \frac{V_b}{V_d} = \frac{400}{200} \times \frac{6}{2} = 6$$

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

فرایندهای ۱ و ۲ هم‌حجم و فرایند AB هم‌فشار است.

با توجه به هر یک از نمودارهای ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1 = V_2} \begin{cases} \frac{1}{200} = \frac{2}{T_A} \Rightarrow T_A = 400K \\ \frac{1}{300} = \frac{2}{T_B} \Rightarrow T_B = 600K \end{cases}$$

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \text{ و } P = \text{ثابت} \Rightarrow \Delta V = \frac{nR}{P} \times \Delta T$$

$$W_{AB} = -P\Delta V \Rightarrow W_P = -P \times \frac{nR}{P} \times \Delta T \Rightarrow W_P = -nR\Delta T$$

کار انجام شده روی گاز: $W_P = -2 \times 8 \times (600 - 400) = -3200J$

کار انجام شده توسط گاز: $W'_P = -W_P = +3200J$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل فقط با دمای آن متناسب است؛ پس داریم:

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{1600}{U_b} = \frac{800}{600} \Rightarrow U_b = 1200J \qquad \Delta U_{ab} = 1200 - 1600 = -400J$$

در فرایند بی‌دررو: $\Delta U_{ab} = W_{ab} \Rightarrow -400 = W_{ab} \Rightarrow |W_{ab}| = 400J$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

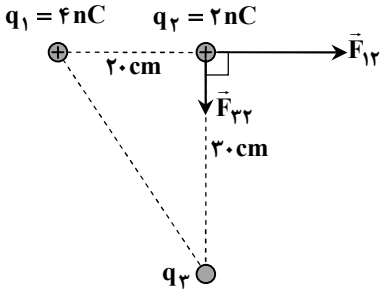
$$F_{1Q} = F_{2Q} \Rightarrow k\frac{|q_1Q|}{r_1^2} = k\frac{|q_2Q|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{(6-4)^2} = \frac{|q_2|}{(6+4)^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{2^2}{10^2} = 0/04$$

چون Q در بیرون فاصلهٔ دو بار q_1 و q_2 قرار دارد، پس باید یکی از بارهای q_1 یا q_2، بار Q را جذب و دیگری آن را دفع نماید تا برایند نیروهای وارد بر Q صفر شود. ازاین‌رو دو بار q_1 و q_2 ناهمنام هستند؛ در نتیجه:

$$\frac{q_1}{q_2} = -0/04$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

با توجه به بردار برایند $\vec{F}_T = (1/8\times10^{-6}\,N)\vec{i} + (-0/6\times10^{-6}\,N)\vec{j}$ متوجه می‌شویم که بردار $\vec{F}_{32}$ مطابق شکل زیر خواهد بود، پس $\vec{F}_{32} = (-0/6\times10^{-6}\,N)\vec{j}$ و در نتیجه علامت بار q_3 منفی است. از طرفی داریم:

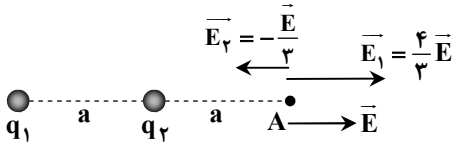


$$F_{32} = k\frac{|q_3||q_2|}{r_{32}^2} \Rightarrow 0/6\times10^{-6} = 9\times10^9\times\frac{|q_3|\times2\times10^{-9}}{900\times10^{-4}}$$

$$\Rightarrow |q_3| = 0/3\times10^{-8}\,C \Rightarrow q_3 = -3\,nC$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

قبل از حذف بار q_1 می‌توان نوشت:



$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \vec{E}$ رابطهٔ (۱)

با حذف بار q_1، میدان در نقطهٔ A، تنها میدان بار q_2 است.

$$\overrightarrow{E_2} = -\frac{\vec{E}}{3} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \overrightarrow{E_1} = \frac{4}{3}\vec{E}$$

با توجه به جهت میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ می‌توان گفت: q_1 و q_2 مختلف‌العلامت هستند.

$$\frac{|\vec{E}_1|}{|\vec{E}_2|} = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|\times(\frac{r_2}{r_1})^2 \Rightarrow 4 = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|\times(\frac{a}{2a})^2 \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = 16 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -16$$

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

تندی پروتون در این جابه‌جایی کاهش یافته، پس نیروی الکتریکی وارد بر آن از طرف میدان خلاف جهت جابه‌جایی بوده است $(\cos\theta = -1)$.

قضیهٔ کار- انرژی جنبشی : $W_E = \Delta K = K_2 - K_1$

$$|q|Ed\cos\theta = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 1/6\times10^{-19}\times5\times10^3\times25\times10^{-2}\times(-1) = \frac{1}{2}\times1/6\times10^{-27}(0 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 25\times10^{10} \Rightarrow v_1 = 5\times10^5\,\frac{m}{s}$$

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

$$\left.\begin{matrix}Q_2 = C_2V\\ Q_1 = C_1V\end{matrix}\right\} \Rightarrow Q_2 - Q_1 = (C_2 - C_1)\times V \Rightarrow 1/08\times10^{-9} = (C_2 - C_1)\times5 \Rightarrow C_2 - C_1 = 2/16\times10^{-10}\,F$$

$$\left.\begin{matrix}C_2 = \kappa\varepsilon_\circ\frac{A}{d_2}\\ C_1 = \kappa\varepsilon_\circ\frac{A}{d_1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow C_2 - C_1 = \kappa\varepsilon_\circ A(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}) \Rightarrow 2/16\times10^{-10} = 3\times9\times10^{-12}\times A(\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{5\times10^{-3}})$$

$$\Rightarrow 2/16\times10^{-10} = 27\times10^{-12}\times A\times\frac{4}{5}\times10^3 \Rightarrow A = \frac{2/16\times5\times10^{-10}}{4\times27\times10^{-9}} = 10^{-2}\,m^2$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

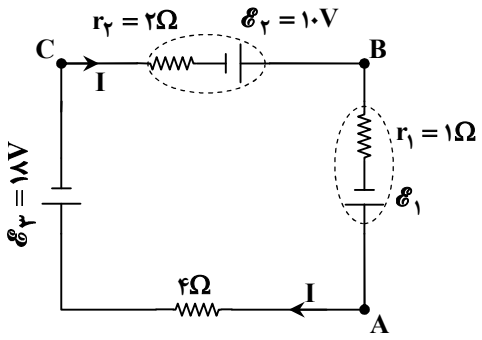
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r} \Rightarrow P = RI^2 = R(\frac{\mathscr{E}}{R+r})^2$$

$$P_2 = P_1 \Rightarrow R_2(\frac{\mathscr{E}}{R_2+r})^2 = R_1(\frac{\mathscr{E}}{R_1+r})^2$$

$$\Rightarrow 9\times\frac{\mathscr{E}^2}{(9+r)^2} = 4\times\frac{\mathscr{E}^2}{(4+r)^2} \Rightarrow \frac{9}{(9+r)^2} = \frac{4}{(4+r)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{9+r} = \frac{2}{4+r} \Rightarrow 12+3r = 18+2r \Rightarrow r = 6\,\Omega$$

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)



جهت جریان در مدار را ساعت‌گرد فرض می‌کنیم. اکنون در جهت جریان فرض‌شده، یک بار از A به C و یک بار از C به B می‌رویم و رابطهٔ ولتاژها را می‌نویسیم.

$$C\text{ به }A: V_A - ۴I - \mathscr{E}_۳ = V_C \Rightarrow V_A - V_C = ۴I + ۱۸$$
$$\Rightarrow ۳V_C = ۴I + ۱۸$$
$$B\text{ به }C: V_C - ۲I + \mathscr{E}_۲ = V_B \Rightarrow V_B - V_C = -۲I + ۱۰$$
$$\Rightarrow V_C = -۲I + ۱۰$$

با توجه به دو معادله و دو مجهول به‌دست‌آمده، می‌توان I و V_C را به‌دست آورد.

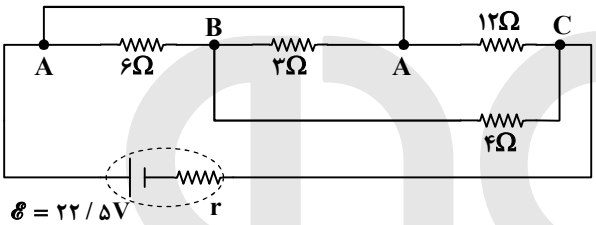
$$\frac{۳V_C}{V_C} = \frac{۴I+۱۸}{-۲I+۱۰} \Rightarrow ۳ = \frac{۴I+۱۸}{-۲I+۱۰} \Rightarrow -۶I + ۳۰ = ۴I + ۱۸ \Rightarrow I = ۱/۲A$$

اکنون قاعدهٔ حلقه را به‌کار می‌بریم (حرکت از A در جهت جریان):

$$V_A - ۴\times ۱/۲ - ۱۸ - ۲\times ۱/۲ + ۱۰ - ۱\times ۱/۲ + \mathscr{E}_۱ = V_A \Rightarrow \mathscr{E}_۱ = ۱۶/۴V$$

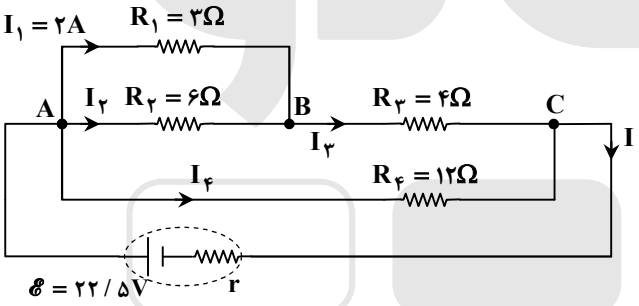
نکته: چون I مثبت به‌دست آمد معلوم می‌شود جهت جریان را درست فرض کرده‌ایم. البته اگر جهت را برعکس (یعنی پادساعت‌گرد) هم فرض می‌کردیم، روابط اندکی تغییر می‌کرد، اما جواب نهایی درست به‌دست می‌آمد. (به‌عنوان تمرین خودتان این کار را انجام دهید.)

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)



ابتدا شکل مدار را کمی ساده می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا گره‌ها را نام‌گذاری می‌نماییم. نقاطی که با سیم بدون مقاومت به هم وصل شده‌اند، پتانسیل یکسانی دارند و لذا نام یکسانی می‌گیرند. (گره A)

شکل مدار ساده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

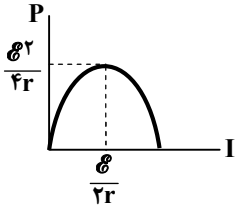


$$\frac{I_۲}{I_۱} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{I_۲}{۲} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow I_۲ = ۱A$$
$$I_۳ = I_۱ + I_۲ = ۲ + ۱ = ۳A$$
$$R_{۱۲۳} = \frac{۳\times ۶}{۳+۶} + ۴ = ۶\Omega$$
$$\frac{I_۴}{I_۳} = \frac{R_{۱۲۳}}{R_۴} \Rightarrow \frac{I_۴}{۳} = \frac{۶}{۱۲} \Rightarrow I_۴ = ۱/۵A$$
$$I = I_۳ + I_۴ = ۳ + ۱/۵ = ۴/۵A$$
$$R_{eq} = \frac{R_{۱۲۳}\times R_۴}{R_{۱۲۳}+R_۴} = \frac{۶\times ۱۲}{۶+۱۲} = ۴\Omega$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}+r} \Rightarrow ۴/۵ = \frac{۲۲/۵}{۴+r} \Rightarrow ۱۸ + ۴/۵r = ۲۲/۵ \Rightarrow ۴/۵r = ۴/۵ \Rightarrow r = ۱\Omega$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

در مداری با یک باتری و تعدادی مقاومت، توان خروجی باتری برابر توان مصرفی مقاومت معادل مدار است (چرا؟). از طرفی رابطهٔ $P = \varepsilon I - rI^۲$ نشان می‌دهد نمودار توان خروجی باتری برحسب جریان آن یک سهمی محدب است.



رأس سهمی:
$$\begin{cases} I_\circ = -\frac{b}{۲a} = -\frac{\mathscr{E}}{۲\times(-r)} = \frac{\mathscr{E}}{۲r} \\ P_{max} = \mathscr{E}I_\circ - rI_\circ^۲ = \mathscr{E}(\frac{\mathscr{E}}{۲r}) - r(\frac{\mathscr{E}}{۲r})^۲ = \frac{\mathscr{E}^۲}{۴r} \end{cases}$$

در این سؤال با توجه به تقارن سهمی، می‌توان جریانی که در آن توان خروجی باتری بیشینه می‌شود (رأس سهمی) را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} I_\circ = \frac{۱+۳}{۲} = ۲A \Rightarrow ۲ = \frac{\mathscr{E}}{۲r} \\ P_{max} = \frac{\mathscr{E}^۲}{۴r} \Rightarrow ۸ = \frac{\mathscr{E}^۲}{۴r} \end{cases} \Rightarrow \mathscr{E} = ۸V \ , \ r = ۲\Omega$$

اکنون به‌ازای $R = ۸\Omega$ جریان عبوری از مدار و توان مصرفی رئوستا را به‌دست می‌آوریم:

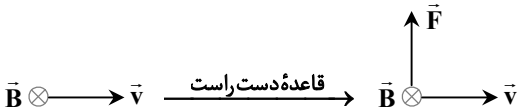
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r} = \frac{۸}{۸+۲} = ۰/۸A$$
$$P = RI^۲ = ۸(۰/۸)^۲ = ۵/۱۲W$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$P=\frac{V^{۲}}{R} \Rightarrow ۱۰۰=\frac{۲۲۰^{۲}}{R} \Rightarrow R=۴۸۴\Omega$$

$$R=R_{\circ}(۱+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow ۴۸۴=۴۰\times(۱+۴/۴۴\times۱۰^{-۳}\Delta\theta) \Rightarrow \Delta\theta=۲۵۰۰^{\circ}C$$

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

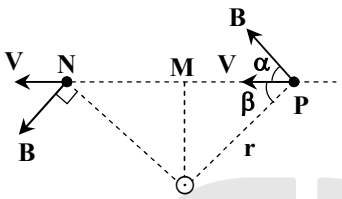


$\vec{F}$ در جهت مثبت محور y $(+\vec{j})$ است.

$$F=|q|vB\sin\theta=۲\times۱۰^{-۶}\times۲\times۱۰^{۵}\times۲۰۰\times۱۰^{-۴}\times\sin۹۰^{\circ}=۸\times۱۰^{-۳}\,N \Rightarrow \vec{F}=(+۸\times۱۰^{-۳}\,N)\vec{j}$$

$$\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow (+۸\times۱۰^{-۳})\vec{j}=۲\times۱۰^{-۳}\times\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=(+۴\frac{m}{s^{۲}})\vec{j}$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۳)



هنگامی که ذره در نقطهٔ P است، جهت نیرو درون‌سو است. با حرکت ذره به‌سمت M، اندازهٔ B و زاویهٔ بین راستای جابه‌جایی و میدان تغییر می‌کند و در نتیجه نیروی وارد بر ذره متغیر است.

پس از عبور از M (در نقطه‌ای مانند N) جهت نیرو برون‌سو و از اندازهٔ B کاسته و $\sin\alpha$ کوچک‌تر می‌شود، پس اندازهٔ F کاهش می‌یابد.

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$L=۲\pi R\times N \Rightarrow N=\frac{L}{۲\pi R}$$

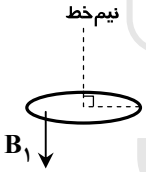
$$B=\frac{\mu_{\circ}}{۲}\frac{NI}{R} \Rightarrow \frac{B_{۲}}{B_{۱}}=\frac{N_{۲}}{N_{۱}}\times\frac{R_{۱}}{R_{۲}}=\frac{\frac{L}{۲\pi R_{۲}}}{\frac{L}{۲\pi R_{۱}}}\times\frac{R_{۱}}{R_{۲}}=(\frac{R_{۱}}{R_{۲}})^{۲}=(\frac{۶}{۹})^{۲}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow B_{۲}=۱۸\times\frac{۴}{۹} \Rightarrow B_{۲}=۸G$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$B=\frac{\mu_{\circ}NI}{\ell} \Rightarrow \Delta B=\frac{\mu_{\circ}N\Delta I}{\ell} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{\mu_{\circ}N}{\ell}\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow ۶۰\times۱۰^{-۴}=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times N}{۱۰^{-۲}}\times۰/۵ \Rightarrow N=۱۰۰$$

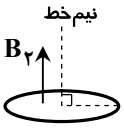
۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

حالت اول:



$$\Phi_{۱}=B_{۱}A\cos\theta_{۱}=۰/۸\times۵۰\times۱۰^{-۴}\times\cos۱۸۰^{\circ}=-۴\times۱۰^{-۳}\,Wb$$

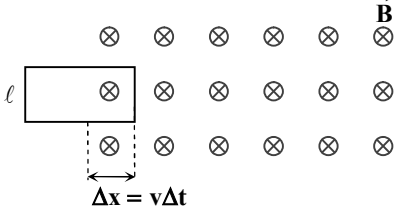
حالت دوم:



$$\Phi_{۲}=B_{۲}A\cos\theta_{۲}=۰/۲\times۵۰\times۱۰^{-۴}\times\cos۰^{\circ}=۱۰^{-۳}\,Wb$$

$$|\bar{E}|=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-۱\times\frac{۱۰^{-۳}-(-۴\times۱۰^{-۳})}{۰/۲}\right|=۰/۰۲۵V$$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)



$$\bar{I}=\frac{|\bar{E}|}{R}=\frac{N}{R}\cdot\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}=\frac{N}{R}\times B\cos\theta\times\frac{|\Delta A|}{\Delta t}=\frac{N}{R}B\cos\theta\times\ell\frac{|\Delta x|}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \bar{I}=\frac{۱}{۵۰}\times۲۰۰\times۱۰^{-۴}\times۱\times۰/۰۵\times۸=۱/۶\times۱۰^{-۴}A$$

طبق قانون لنز، جهت جریان القایی پادساعت‌گرد است.

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

$$\begin{cases}B=\mu_{\circ}\frac{NI}{\ell}\\ L=\mu_{\circ}\frac{N^{۲}A}{\ell}\end{cases} \Rightarrow \frac{L}{B}=\frac{NA}{I} \Rightarrow \frac{L}{۰/۴}=\frac{۱۰۰۰\times۵\times۱۰^{-۴}}{۲۰} \Rightarrow L=\frac{۵\times۱۰^{-۱}\times۰/۴}{۲۰}=۱۰^{-۲}\,H=۱۰mH$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

با توجه به مدل کوانتومی، الکترون‌ها در فضایی بسیار بزرگ و در لایه‌هایی پیرامون هسته‌ای توزیع شده‌اند و در نظر گرفتن مسیر دایره‌ای برای الکترون نادرست است.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

نام صحیح ترکیب B، اتیل بوتانوات است که یک استر می‌باشد، در آناناس موجود بوده و مانند سایر استرها، عطر و بوی خوش دارد.

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

دو فراورده با ضرایب مولی متفاوت در واکنش تولید می‌شوند، پس باید دو منحنی صعودی با شیب متفاوت (NO دو برابر O_2) در نمودار وجود داشته باشد (حذف گزینه‌های ۳ و ۴) و ضریب مولی یکی از فراورده‌ها (NO) با ضریب مولی واکنش‌دهنده برابر است. (حذف گزینهٔ ۲)

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا عدد اتمی عنصر را محاسبه می‌کنیم.

$$N - Z = ۴ \Rightarrow ۵۶ = Z + Z + ۴ \Rightarrow ۲Z = ۵۲ \Rightarrow Z = ۲۶$$

$$_{۲۶}X = ۱s^۲, ۲s^۲\ ۲p^۶, \underbrace{۳s^۲\ ۳p^۶\ ۳d^۶}_{\text{۱۴ الکترون}}, ۴s^۲$$

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

$$C_۲H_۵OH_{(l)} + ۳O_{۲(g)} \rightarrow ۲CO_{۲(g)} + ۳H_۲O_{(g)}$$

حدود ۲۰ درصد ($\frac{۱}{۵}$) حجم هوا را گاز اکسیژن تشکیل می‌دهد.

$$\text{L هوا} = ۰/۵\ \text{mol}\ C_۲H_۵OH \times \frac{۳\ \text{mol}\ O_۲}{۱\ \text{mol}\ C_۲H_۵OH} \times \frac{۲۲/۴\ \text{L}\ O_۲}{۱\ \text{mol}\ O_۲} \times \frac{۵\ \text{L هوا}}{۱\ \text{L}\ O_۲} = ۱۶۸\ \text{L}$$

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

کاتیون‌های $Ba^{۲+}$، $Ca^{۲+}$ و $Zn^{۲+}$ هر سه دارای دو بار مثبت هستند.

$A: BaCO_۳$ → ۵ : تعداد اتم و ۳ : تعداد عنصر

$B: Ca(NO_۳)_۲$ → ۹ : تعداد اتم و ۳ : تعداد عنصر

$C: (NH_۴)_۲S$ → ۱۱ : تعداد اتم و ۳ : تعداد عنصر

$D: ZnSO_۴$ → ۶ : تعداد اتم و ۳ : تعداد عنصر

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

همهٔ عبارت‌های داده شده درست‌اند.

- $\text{آلدهیدها}: R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-H \Rightarrow \text{ساده‌ترین عضو}: H-\overset{\overset{:O:}{\|}}{C}-H$
- در ساختار فرمالدهید، ۴ جفت الکترون پیوندی و ۲ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
- اتم‌های هیدروژن به آرایش گاز نجیب هلیم و اتم‌های کربن و اکسیژن به آرایش گاز نجیب نئون رسیده‌اند.
- فرمول فرمالدهید، $CH_۲O$ و فرمول استیک اسید، $C_۲H_۴O_۲$ است.

$$CH_۲O = \frac{۱}{۲}(C_۲H_۴O_۲)$$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: نام درست گزینهٔ ۱ به‌صورت ۱- بوتن می‌باشد.

گزینهٔ ۲: هیچ ترکیبی با نام داده شده در گزینهٔ ۲ وجود ندارد زیرا کربن پیوند دوگانه نمی‌تواند ۲ شاخهٔ فرعی آلکیل داشته باشد.

گزینهٔ ۳: در آلکان‌ها، اتیل نمی‌تواند به عنوان شاخهٔ فرعی در موقعیت شمارهٔ (۲) باشد.

مؤسسه آموزش فرهنگی

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$
$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

با توجه به ضریب CO_2 در دو معادلهٔ بالا و برابر بودن مول اولیهٔ متان و پروپان، می‌توان گفت $\frac{1}{4}$ سهم CO_2 تولیدی مربوط به سوختن متان است.

$$\text{مول } CO_2 \text{ حاصل از متان} = \frac{5}{4} = 1/25 \quad \text{مول } CO_2 \text{ حاصل} = \frac{220}{44} = 5 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{مول متان سوخته شده} = 1/25 \Rightarrow \bar{R}_{CH_4} = \frac{1/25}{5} = 0/25\,mol \cdot min^{-1}$$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$R(\text{واکنش اول}) = \frac{\frac{\text{mol A}}{\Delta t}}{2} = \frac{\text{mol A}}{2\Delta t}$$
$$R(\text{واکنش دوم}) = \frac{\frac{\text{mol Z}}{\Delta t}}{1} = \frac{\text{mol Z}}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{\text{mol A}}{2\Delta t}}{\frac{\text{mol Z}}{\Delta t}} = 2 \Rightarrow \frac{\text{mol A}}{\text{mol Z}} = 4$$

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$n = MV \rightarrow n = 0/2 \times 3 = 0/6\,mol\,NaBr$$
$$\Rightarrow 0/6\,mol \times \frac{103g}{1mol} = 61/8\,g\,NaBr$$
$$60 = \frac{61/8}{\text{مقدار کل ناخالص}} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار کل ناخالص} = 103g$$

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$5 \times \frac{60}{100} = 3g \text{ خالص } CaCO_3$$
$$3g\,CaCO_3 \times \frac{1mol\,CaCO_3}{100g\,CaCO_3} \times \frac{1mol\,CO_2}{1mol\,CaCO_3} = 0/03\,mol\,CO_2 \text{ (مول گاز حاصل از تجزیهٔ کلسیم کربنات)}$$
$$0/03mol \text{ گاز} \times \frac{2mol\,NaHCO_3}{2mol \text{ گاز}(CO_2 + H_2O)} \times \frac{84g\,NaHCO_3}{1mol\,NaHCO_3} = 2/52g\,NaHCO_3 \text{ (خالص)}$$
$$2/52g\,NaHCO_3 \text{ خالص} \times \frac{1mol\,NaHCO_3}{84g\,NaHCO_3} \times \frac{1mol\,Na_2CO_3}{2mol\,NaHCO_3} \times \frac{106g\,Na_2CO_3}{1mol\,Na_2CO_3} = 1/59g \text{ سدیم کربنات جامد}$$

گرم ناخالصی‌های باقی‌مانده در ظرف واکنش $8 - 2/52 = 5/48$

$5/48 + 1/59 = 7/07g$ (Na_2CO_3 + ناخالصی‌ها)

راه‌حل دوم:

اگر جرم گازهای تولیدشده را از جرم اولیه (۸ گرم) کم کنیم، جرم مواد جامد بر جای مانده، به‌دست می‌آید. ضریب CO_2 و H_2O در معادلهٔ واکنش یکسان است؛ بنابراین از ۰/۰۳ مول گاز تولیدشده، نصف آن مربوط به CO_2 و نصف آن مربوط به H_2O است:

$$\text{جرم گازها}: (\frac{0/03}{2} \times 44) + (\frac{0/03}{2} \times 18) = 0/93g$$

$$\text{جرم مواد جامد باقی‌مانده} = 8 - 0/93 = 7/07g$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$A - A + B - B \rightarrow 2A - B$$

آنتالپی پیوند: $\quad x \quad 2x \quad 4x$

$$\Delta H = x + 2x - 2 \times 4x = -800$$
$$5x = 800 \Rightarrow x = 160$$

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

با توجه به قانون هس خواهیم داشت:

$$\Delta H = \Delta H_1 + 2\Delta H_2 - \Delta H_3 = (-394) + (2 \times -286) + 890 = -76\,kJ$$

به ازای ۱ مول C، ۷۶ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین به ازای ۰/۲ مول از آن، ۱۵/۲kJ گرما آزاد خواهد شد.

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

کلسیم سولفات به میزان $\frac{g}{100\,g\,H_2O}$ ۰/۲۱ (کم‌تر از یک گرم و بیش‌تر از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب) حل می‌شود و جزو مواد کم‌محلول است.

بررسی گزینهٔ ۴:

جرم محلول شکر $= 100 + 205 = 305\,g$

شکر حل‌شده	محلول
۲۰۵ g	۳۰۵ g
x = ۴۱۰ g	۶۱۰ g

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۵۰ g محلول با ۲۰ درصد جرمی : { ۴۰ g حلال ، ۱۰ g حل‌شونده } $\Rightarrow 80 = \frac{x}{40} \times 100 \Rightarrow x = 32\,g$ جرم حل‌شونده در محلول سیرشده

$\Rightarrow$ جرم نمک لازم $= 32 - 10 = 22\,g$

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

عبارت‌های اول و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم: از آبکافت اتیل بوتانوات، یک الکل دوکربنی و یک اسید آلی چهارکربنی تولید می‌شود.

عبارت چهارم: نیروی بین‌مولکولی غالب در الکل‌ها تا پنج اتم کربن، از نوع پیوند هیدروژنی است.

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

عبارت‌های دوم تا چهارم درست هستند.

■ ترکیب A دارای گروه عاملی آمینی $(R - \underset{\displaystyle R''}{\overset{|}{N}} - R')$ نیست.

■ در هر دو ترکیب، ۱۶ اتم هیدروژن وجود دارد.

■ در ترکیب A در مجموع ۳۳ پیوند یگانه ($C-C$، $C-H$، $C-N$، $O-H$، $C-O$ و $N-H$) وجود دارد. ترکیب B نیز دارای ۵ پیوند دوگانه است:

$\frac{33}{5} = 6/6$

■ ترکیب‌های A و B، در مجموع دارای ۷ اتم اکسیژن (هریک دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی) و ۴ اتم نیتروژن (هریک دارای ۱ جفت الکترون ناپیوندی) هستند.

شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی $= (7 \times 2) + (4 \times 1) = 18$

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

همهٔ عبارت‌های داده شده نادرست هستند.

■ اسمز معکوس روش مناسب‌تری نسبت به تقطیر است، زیرا در روش تقطیر، علاوه بر میکروب‌ها، ترکیب‌های آلی فرّار نیز در آب باقی می‌مانند.

■ در همهٔ روش‌های تصفیه، باید آب را پیش از مصرف کلرزنی کرد.

■ در فرایند اسمز، آب از محیط رقیق به محیط غلیظ جابه‌جا می‌شود.

■ درشت مولکول‌ها از غشای نیمه‌تراوا عبور نمی‌کنند.

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

فقط عبارت چهارم درست است.

■ سبک‌ترین $(_1^1H)$ و سنگین‌ترین ایزوتوپ $(_1^3H)$ طبیعی هیدروژن، به‌ترتیب، صفر و دو نوترون در هستهٔ اتم خود دارند.

■ در بین ایزوتوپ‌های طبیعی یک عنصر، همواره ایزوتوپ‌های سبک‌تر فراوانی بیشتری ندارند؛ برای مثال، ایزوتوپ سنگین‌تر لیتیم، فراوانی طبیعی بیشتری دارد.

■ برخی ایزوتوپ‌ها (مانند $_1^3H$)، نیم‌عمری در حدود چند سال دارند.

■ سنگین‌ترین مولکول هیدروژنی که از ایزوتوپ‌های طبیعی هیدروژن تشکیل می‌شود، H_2^3 است که جرم مولکولی آن حدود $2 \times 3 = 6\,amu$ می‌باشد.

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

$$2Fe + O_2 \rightarrow 2FeO$$

$$\frac{28\times0/2}{2\times56} = \frac{x}{32} = \frac{x'}{2} \Rightarrow x = 1/6g\ O_2 \qquad x' = 0/1mol\ FeO$$

$$4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$$

$$\frac{28\times0/8}{4\times56} = \frac{y}{3\times32} = \frac{y'}{2} \Rightarrow y = 9/6g\ O_2 \qquad y' = 0/2mol\ Fe_2O_3$$

جرم اکسیژن مصرفی $= 9/6 + 1/6 = 11/2g$

$$\frac{mol\ Fe_2O_3}{mol\ FeO} = 2$$

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

می‌دانیم که با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها، فرّاریت آن‌ها کاهش و گران روی آن‌ها افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه پروپان و هپتان به‌ترتیب ۳ و ۷ کربنی هستند، نتیجه می‌گیریم که آلکان موردنظر می‌تواند یکی از آلکان‌های C_4H_{10}، C_5H_{12} و یا C_6H_{14} باشد. نقطهٔ جوش هر سه آلکان از نونان (C_9H_{20}) کمتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در دمای $22^\circ C$، C_4H_{10} گاز و C_5H_{12} و C_6H_{14} مایع هستند.

۲) جرم مولی C_4H_{10} با جرم مولی استون (C_3H_6O) برابر است.

۴) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در هر سه آلکان، کمتر از ۳ است:

$$\frac{10}{4} = 2/5 \quad , \quad \frac{12}{5} = 2/4 \quad , \quad \frac{14}{6} \simeq 2/3$$

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل‌های ۱ و ۳)

فقط عبارت دوم درست است.

$C_2H_2 \rightarrow$ الکترون‌های لایهٔ ظرفیت $= (2\times4) + (2\times1) = 10$

$OH^- \rightarrow$ الکترون‌ها $= [8+1] + 1 = 10$

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: شکل داده‌شده، مربوط به اتین (C_2H_2) است، در حالی که با وارد کردن اتن (C_2H_4) در مخلوط آب و اسید در شرایط مناسب، اتانول را در مقیاس صنعتی تولید می‌کنند.

عبارت سوم: از اتن به‌عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

عبارت چهارم: از بسپارش C_2F_4 (و نه C_2F_2!)، تفلون به‌دست می‌آید که در تهیهٔ نخ دندان کاربرد دارد.

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

فرمول اتیلن، C_2H_4 است و جرم مولی آن از گاز اکسیژن (O_2) کمتر می‌باشد؛ بنابراین در دما و فشار یکسان، چگالی کمتری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بنزن دارای ۳ پیوند دوگانه است و هر مول از آن با ۳ مول گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش می‌دهد:

$$\underset{78g}{C_6H_6} + \underset{6g}{3H_2} \rightarrow C_6H_{12}$$

درصد افزایش جرم $= \frac{6}{78}\times100 \simeq \%7/7$

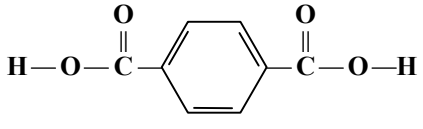
۲) فرمول مولکولی ترکیبی با ساختار داده شده مانند ۲- پنتن (آلکن ۵ کربنی)، C_5H_{10} است.

۳)

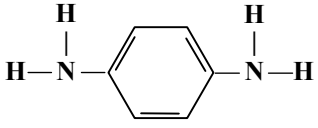
بوتن-۱: $C_4H_8 : \frac{C}{H} = \frac{4}{8} = 0/5$ نفتالن: $C_{10}H_8 : \frac{H}{C} = 0/8$

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

ساختار و فرمول مولکولی دی‌آمین و دی‌اسید سازندهٔ کولار، به‌صورت زیر است:



$C_8H_6O_4$



$C_6H_8N_2$

با توجه به ساختارها، به‌دلیل وجود حلقهٔ بنزنی در آن‌ها، هر دو آروماتیک هستند.

کولار به‌دلیل وجود پیوند $N-H$ و وجود اتم‌های O، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

از آبکافت ۱ مول پلی‌استر داده شده، ۲۰۰۰ مول $CH_2(OH)_2$ ($48g\cdot mol^{-1}$) و ۲۰۰۰ مول $CH_2(COOH)_2$ ($104g\cdot mol^{-1}$) تولید می‌شود که درصد جرمی دی‌الکل برابر است با:

$$\frac{48}{48+104}\times 100 \simeq 31/6$$

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

الف) $CH_2=\underset{\displaystyle C\equiv N:}{\underset{|}{CH}}$

ب) در تهیهٔ سرنگ از پلی‌پروپن استفاده می‌شود.

پ) $C_3H_3N \Rightarrow \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم هیدروژن}}=\frac{3\times 12}{3}=12$

ت) پلی‌پروپن $+CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}+_n$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

اتان (C_2H_6) سیرشده است و نمی‌توان از آن پلیمر تهیه کرد، پس ابتدا باید جرم اتن (C_2H_4) موجود در مخلوط را حساب کنیم:

مول کل گازها: $268/8L\times\frac{1mol}{22/4L}=12mol$

اگر تعداد مول اتان و اتن موجود در مخلوط را به‌ترتیب x و y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x+y=12$$

$$\frac{\text{جرم } C_2H_6}{\text{جرم } C_2H_4}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{30x}{28y}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=1/4y$$

$$x+y=12\Rightarrow 2/4y=12\Rightarrow y=\frac{12}{2/4}=5mol\,C_2H_4$$

$$\text{جرم } C_2H_4=5mol\times\frac{28g}{1mol}=140g$$

اگر بازده فرایند بسپارش، ۱۰۰ درصد باشد، از ۱۴۰ گرم اتن، می‌توان ۱۴۰ گرم پلی‌اتن تولید کرد. با توجه به اینکه بازده ۷۵ درصد است، خواهیم داشت:

$$\text{جرم پلی‌اتن تولیدشده}=140\times\frac{75}{100}=105g$$

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

فراوردهٔ سوختن کامل گرافیت و الماس، یکسان (CO_2) است.

گزینهٔ ۱: هر دو واکنش گرماده هستند و در واکنش اول، واکنش‌دهنده‌ها پایدارترند و سطح انرژی کمتری دارند؛ به همین دلیل مقدار گرمای آزادشده در این واکنش کمتر است.

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: تعداد عناصری که بر اثر ضربه خرد می‌شوند = ۳ عنصر (کربن- سیلیسیم- ژرمانیم)

تعداد زیرلایه‌های اتم نخست ($_6C$) = ۳ زیرلایه ($_6C: 1s^2/2s^2 2p^2$)

گزینهٔ ۲: تعداد عناصری که رسانای خوب جریان برق و گرما هستند = ۲ عنصر (قلع- سرب)

تعداد الکترون‌های آخرین زیرلایهٔ آن‌ها = ۲ الکترون

گزینهٔ ۳: تعداد عناصری که در واکنش با دیگر اتم‌ها معمولاً به یون تبدیل می‌شوند = ۲ عنصر (قلع- سرب)

تعداد الکترون‌های آخرین لایهٔ الکترونی در این گروه = ۴ الکترون

گزینهٔ ۴: تعداد عناصری که می‌توانند به یون مثبت تبدیل شوند = ۲ عنصر (قلع- سرب)

تعداد شبه‌فلزهای گروه = ۲ عنصر (سیلیسیم- ژرمانیم)

گروه چهاردهم (ns^2np^2)
$_6C$
$_{14}Si$
$_{32}Ge$
$_{50}Sn$
$_{82}Pb$