

تابع مشتق:

اگر حد مورد تعریف را به جای آن که در نقطه x_0 تعریف کنیم، در تمامی نقاطی مانند x که مشتق تابع در آن نقاط موجود است، مورد محاسبه قرار دهیم به این تابع جدید که در هر نقطه مشتق تابع در آن نقطه را معین می کند، تابع مشتق می گویند.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

دقت کنید که تابع مشتق را از تعریف دوم یعنی $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نمی‌توان محاسبه کرد.

این تعریف فقط برای محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه به کار می‌رود و تابع مشتق را نمی‌توان از روی آن به دست آورد. یعنی می‌توان $f'(x_0)$ را از این فرمول محاسبه کرد.

مثال: تابع مشتق توابع زیر را در دامنه‌ای که مشتق‌پذیرند، بیابید.

الف) $y = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{D=\mathbb{R}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \dots + h^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \dots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \frac{h^n}{h} = nx^{n-1}$$

راه حل ۲:

$$y = x^n$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1} + \dots + x^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + \dots + x^{n-1})}{h}$$

$$= x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

ب) $y = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7) \ y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{x(x+h) \cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

دقت کنید اگر بخواهیم از فرمول $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ استفاده کنیم مشتق در

نقطه‌ی $x = a$ به دست می‌آید:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{ax^2} = \frac{-1}{a^2}$$