گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

جزوهٔ کمک آموزشی

ریاضی و آمار (۲)

فصل ۱

درس ۲: استدلال ریاضی

تهیه و تنظیم:
سید امیر محمد شاکری

۲۰۰۰۰۳۱۶ www.gozine2.ir gozine2.ir @gozine2

۱- تبدیل عبارت‌های کلامی به ریاضی

برای تبدیل عبارت کلامی به ریاضی ابتدا باید متغر(ها) را تشخیص داده و مطابق عبارت، روابط بین متغیر(ها) را بنویسیم.

مثال: مجموع دو برابر عددی با پنج، برابر خود عدد شده است.

اگر عدد را x در نظر بگیریم، دو برابر آن به‌صورت $۲x$ و عبارت داده‌شده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$۲x+۵=x$$

تست: عبارت کلامی «مربع مجموع عددی با دو، بزرگ‌تر از هفت برابر همان عدد شده است» به زبان ریاضی کدام است؟

۱) $x^۲+۲>۷x$ ۲) $(x+۲)^۲=۷x$ ۳) $(x+۲)^۲=(۷x)^۲$ ۴) $(x+۲)^۲>۷x$

حل: اگر عدد موردنظر را x در نظر بگیریم، مجموع این عدد با دو به‌صورت $x+۲$ و مربع مجموع این عدد با دو به‌صورت $(x+۲)^۲$ است. از طرفی هفت برابر این عدد به‌صورت $۷x$ است، پس می‌توان نوشت: $(x+۲)^۲>۷x$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۲- قیاس استثنایی:

قیاس استثنایی را به دو صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

اگر الف آنگاه ب
الف
∴ ب

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

که در اینجا سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

مثال:

مقدمهٔ ۱) اگر علی زیاد غذا بخورد آنگاه مریض می‌شود.
مقدمهٔ ۲) علی زیاد غذا می‌خورد.
∴ علی مریض می‌شود.

مقدمهٔ ۱) اگر عددی مثبت باشد آنگاه دو برابر آن هم مثبت است.
مقدمهٔ ۲) عدد ۳ مثبت است.
∴ عدد ۶ هم مثبت است.

تذکر: اگر در قیاس استثنایی، در مقدمهٔ دوم به‌جای مقدم (p)، تالی (q) را بنویسیم، منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود که به آن مغالطه می‌گوییم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$

مثال:

مقدمهٔ ۱) اگر توپ به شیشه بخورد آنگاه شیشه می‌شکند.
مقدمهٔ ۲) شیشه شکسته است.
∴ توپ به شیشه برخورد کرد.

تست: کدام گزینه یک قیاس استثنایی است؟

۱) مقدمهٔ ۱) اگر برادر علی از او بزرگ‌تر باشد آنگاه او فرزند کوچک‌تر است.
مقدمهٔ ۲) علی فرزند کوچک‌تر است.
___
∴ برادر علی از او بزرگ‌تر است.

۲) مقدمهٔ ۱) اگر ۲ عددی زوج است آنگاه ۲ اول است.
مقدمهٔ ۲) ۲ عددی اول است.
___
∴ ۲ عددی زوج است.

۳) مقدمهٔ ۱) اگر $\sqrt{r}$ گویا است، آنگاه r عددی فرد است.
مقدمهٔ ۲) r عددی فرد است.
___
∴ $\sqrt{r}$ عددی گویا است.

۴) مقدمهٔ ۱) اگر چراغ روش باشد، آنگاه برق مصرف می‌شود.
مقدمهٔ ۲) چراغ روشن است.
___
∴ برق مصرف می‌شود.

حل: با توجه به قیاس استثنایی، گزینهٔ ۴ پاسخ است. دقت کنید که سایر گزینه‌ها مغالطه هستند.

تذکر: اگر قیاس استثنایی را با نماد ریاضی نشان دهیم، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$((p\Rightarrow q)\wedge p)\Rightarrow q$$

جدول ارزش این گزاره به‌صورت زیر است:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$((p\Rightarrow q)\wedge p)\Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

تذکر: اگر مغالطه را بخواهیم با نماد ریاضی نشان دهیم، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$((p\Rightarrow q)\wedge q)\Rightarrow p$$

جدول ارزش این گزاره به‌صورت زیر است:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$((p\Rightarrow q)\wedge p)\Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	د

تست: در قیاس مقابل در جای خالی کدام گزینه را قرار دهیم تا قیاس استثنایی کامل گردد؟

$p: x<۰ \rightarrow q: x^۲>۰$
....
___
$\therefore ۹>۰$

۱) $۳>۰$ ۲) $۹>۰$ ۳) $-۳<۰$ ۴) $-۹<۰$

حل: در جای خالی باید از گزارهٔ p استفاده کنیم. از طرفی عددی باید انتخاب شود که مربع آن (نتیجه) ۹ باشد.
بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

تذکر: یکی از مسائلی که به‌کمک استدلال ریاضی حل می‌شود، مسائل مربوط به لیوان‌های وارونه و درست است. اگر n لیوان داشته باشیم که m تای آن‌ها وارونه باشند و در هر بار بتوانیم s لیوان را تغییر وضعیت دهیم (وارونه کنیم یا درست بگذاریم)، آنگاه داریم:
اگر تعداد لیوان‌های وارونه (m) فرد باشد و s عددی زوج باشد، هیچ‌گاه نمی‌توان تمام لیوان‌ها را به حالت درست درآورد.

مثال: ۷ لیوان داریم که ۳ تای آن‌ها به‌صورت وارونه قرار گرفته‌اند. اگر در هر بار بتوانیم ۴ لیوان را تغییر وضعیت دهیم (از حالت درست به وارونه یا بالعکس) در چند حالت تمام لیوان‌ها در حالت درست قرار می‌گیرند؟

با توجه به تذکر گفته‌شده، در این مثال چون تعداد لیوان‌های وارونه عددی فرد است و ما در هر مرتبه فقط ۴ لیوان (زوج لیوان) را می‌توانیم تغییر وضعیت دهیم، پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم کل لیوان‌ها را به حالت درست در بیاوریم.

تذکر: برای اثبات برخی از گزاره‌های ریاضی می‌توانیم به‌جای اثبات خود گزاره، عکس نقیض آن را $((p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p))$ ثابت کنیم.

مثال: به‌جای اثبات گزارهٔ «اگر n^2 عددی زوج باشد آنگاه n عددی زوج است. $(n \in \mathbb{N})$» می‌توان عکس نقیض آن یعنی «اگر n عددی فرد باشد آنگاه n^2 عددی فرد است. $(n \in \mathbb{N})$» را ثابت کرد.

۳- خطا در استدلال

گاهی در استدلال‌هایی که انجام می‌دهیم، دچار خطا می‌شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع آن، بسیار مهم است.

از مواردی که ممکن است در محاسبات ریاضی باعث ایجاد خطا در استدلال شود، به صورت زیر است:

۱) طرفین یک تساوی را نمی‌توان بر یک متغیر یا عبارتی که شامل متغیر است تقسیم نمود؛ زیرا ممکن است صفر باشد. (مگر عبارتی که بر آن تقسیم می‌کنیم همواره مثبت باشد.)

۲) اگر در یک نامساوی، عبارت را در عددی منفی ضرب کنیم، جهت نامساوی را باید تغییر دهیم.

۳) در ساده‌سازی صورت و مخرج یک عبارت گویا، فقط وقتی مجاز به ساده‌سازی هستیم که بین عبارت‌ها ضرب یا تقسیم باشد.

۴) طرفین یک نامساوی را نمی‌توانیم به توان ۲ برسانیم زیرا ممکن است جهت نامساوی تغییر کند.

مثال: در استدلال زیر نشان داده‌شده است که معادلهٔ $x^2 - 5x = 0$ فقط دارای ریشهٔ $x = 5$ است. ایراد این استدلال در کدام مرحله است؟

۱) $x^2 - 5x = 0$

۲) $x^2 = 5x$ ساده‌سازی معادله

۳) $\frac{x^2}{x} = \frac{5x}{x}$ تقسیم طرفین بر x

۴) $x = 5$ ساده‌سازی معادله

حل: ایراد این استدلال در مرحلهٔ سوم آن است. زیرا طرفین معادله را بر x تقسیم کرده‌ایم و اجازهٔ این کار را نداشتیم؛ زیرا ممکن است مقدار x صفر باشد.

تست: علی از عبارت $a < b$ ثابت کرده است $da - db < 0$. ایراد استدلال او در کدام مرحله است؟

$a < b$

۱) $a + b < b + c$ ۲) $d(a+c) < d(a+c)$

۳) $da + dc < db + dc$ ۴) $da - db < 0$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل: علی در مرحلهٔ دوم خود دچار اشکال شده است؛ زیرا طرفین نامساوی را در عددی ضرب کرده که ممکن است این عدد منفی باشد و جهت نامساوی تغییر کند.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

تست: کدام دانش‌آموز مراحل ساده‌سازی کسر $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ را به‌درستی انجام داده است؟

۱) حسن:

$$\frac{\cancel{x^2} - 2x + 1}{\cancel{x} - 1} = \frac{x - 2x + 1}{x - 1} = \frac{-x + 1}{x - 1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

۲) رضا:

$$\frac{x^2 - 2\cancel{x} + 1}{\cancel{x} - 1} = \frac{x^2 - 2 + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1$$

۳) محمد:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{\cancel{x}(x-2) + 1}{\cancel{x} - 1} = \frac{x - 2 + 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

۴) یاسین:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}^2}{\cancel{x-1}} = \frac{x - 1}{1} = x - 1$$

حل: گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ همگی نشان‌دهندهٔ ساده‌سازی نادرست یک عبارت گویا است، ولی گزینهٔ ۴ پاسخ درست است.