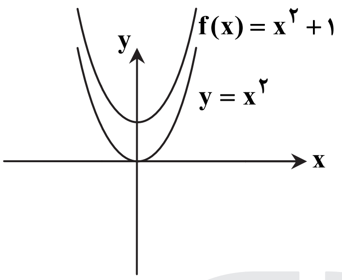
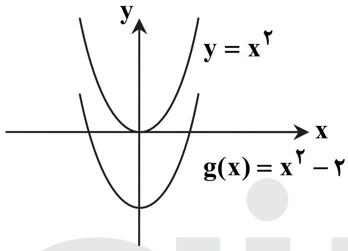
انتقال نمودارها:

۱- **انتقال عمودی:** برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<۰$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

مثال) نمودار توابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=x^۲-۲$ را به کمک نمودار $y=x^۲$ رسم کنید.

پاسخ:



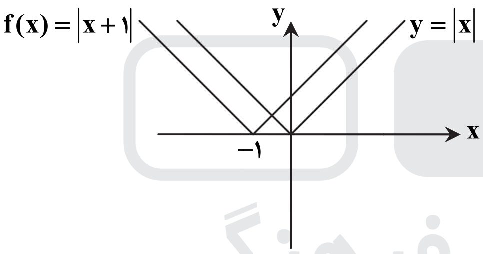


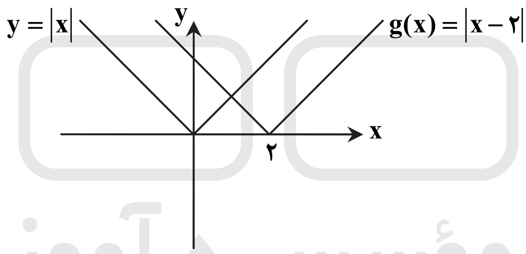
نکته: اگر $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $(x_۰,y_۰+k)$ نقطهٔ متناظر روی نمودار $g(x)=f(x)+k$ است.

۲- **انتقال افقی:** برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

مثال) نمودار توابع $f(x)=|x+۱|$ و $g(x)=|x-۲|$ را به کمک نمودار $y=|x|$ رسم کنید.

پاسخ:





نکته: اگر $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $(x_۰-k,y_۰)$ نقطهٔ متناظر روی نمودار $g(x)=f(x+k)$ است.

مثال) نقطهٔ $(۱,۲)$ روی نمودار $f(x)$ است. نقطهٔ متناظر با این نقطه روی نمودار $g(x)=f(x+۲)-۴$ را به‌دست آورید.

پاسخ: مطابق نکات گفته شده نقطهٔ متناظر $(۱,۲)$ روی نمودار $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$(۱-۲,۲-۴)=(-۱,-۲)$$

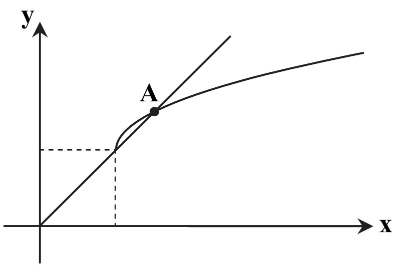
تست: نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۲}$ به‌صورت مقابل است، طول نقطهٔ A کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}$

۲) $۲+\sqrt{۳}$

۳) ۳

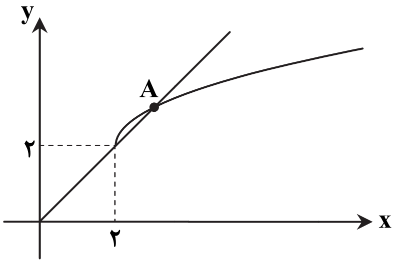
۴) ۴



حل: با توجه به شکل، این خط از نقطهٔ $(۰,۰)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد. پس ضابطهٔ آن به‌صورت $y = x$ است. حال محل تقاطع خط با تابع y را به‌دست می‌آوریم:

$$۲+\sqrt{x-۲} = x \Rightarrow \sqrt{x-۲} = x-۲ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x-۲ = x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

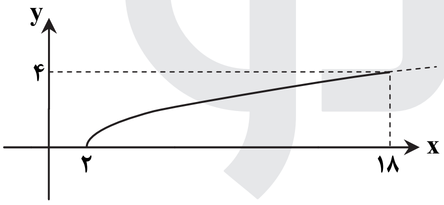


بنابراین طول نقطهٔ A، $x = ۳$ است.

تست: اگر $f(x) = \sqrt{x-۲}$ با برد $[۰,۴]$ را در نظر بگیریم، دامنهٔ تعریف $y = f(x-۲)$ کدام است؟

۱) $[۲,۱۸]$ ۲) $[۰,۱۶]$ ۳) $[۴,۲۰]$ ۴) $[۳,۷]$

حل: ابتدا تابع $f(x) = \sqrt{x-۲}$ را رسم می‌کنیم:

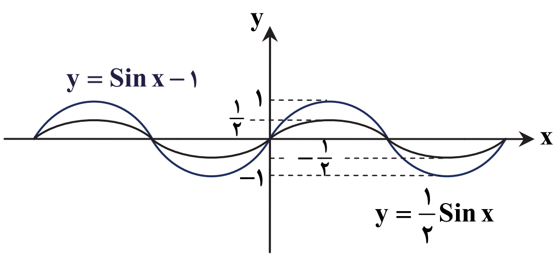


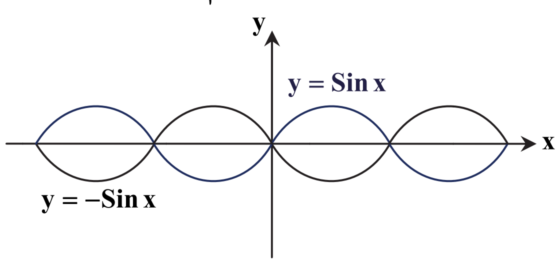
با توجه به شکل، اگر برد تابع $[۰,۴]$ باشد، دامنهٔ آن $[۲,۱۸]$ است.
نمودار تابع $f(x-۲)$ همان نمودار تابع f است که ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کرده است. بنابراین دامنهٔ این تابع به‌صورت $[۴,۲۰]$ می‌باشد.

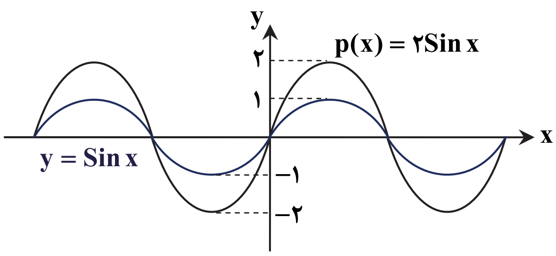
۳- **انبساط و انقباض عمودی:** برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k > ۱$، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

برای رسم نمودار $y = -f(x)$، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

مثال) نمودار هر یک از توابع $f(x) = ۲\operatorname{Sin} x$، $g(x) = \frac{۱}{۲}\operatorname{Sin} x$ و $h(x) = -\operatorname{Sin} x$ را به کمک $y = \operatorname{Sin} x$ رسم کنید.







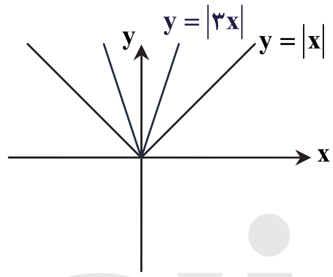
نکته: اگر $(x_{۰},y_{۰})$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $(x_{۰},ky_{۰})$ نقطهٔ متناظر روی نمودار $g(x)=kf(x)$ است.

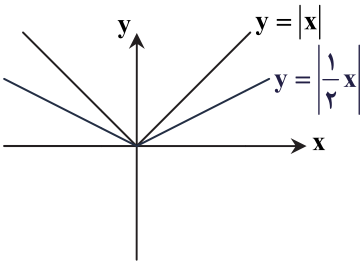
۴- **انبساط و انقباض افقی:** برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

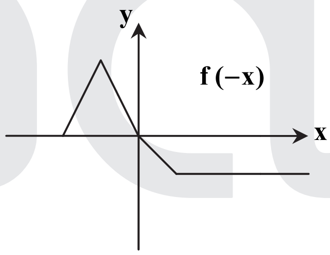
مثال) نمودار توابع $y=|۳x|$ و $y=\left|\frac{۱}{۲}x\right|$ را به کمک نمودار $y=|x|$ رسم کنید.

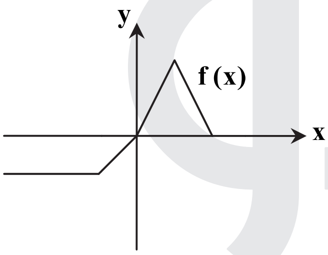
پاسخ:





مثال) اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار $f(-x)$ را رسم کنید.

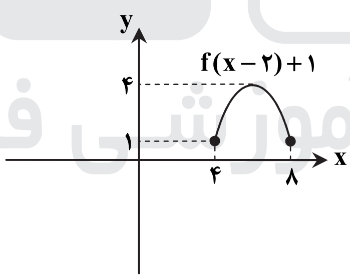


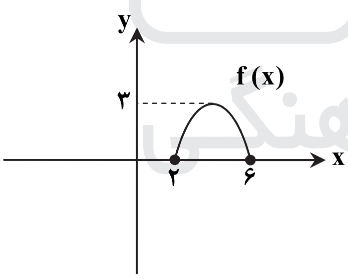


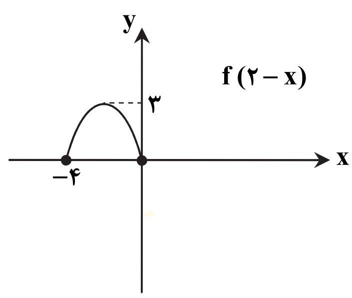
نکته: اگر $(x_{۰},y_{۰})$ یک نقطه از نمودار $y=f(x)$ باشد، آنگاه $(\frac{x_{۰}}{k},y_{۰})$ نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(kx)$ است.

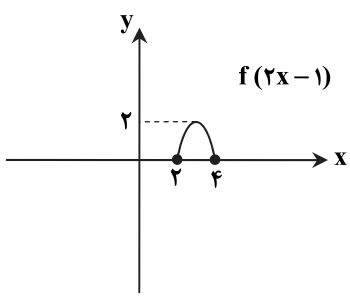
مثال) اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

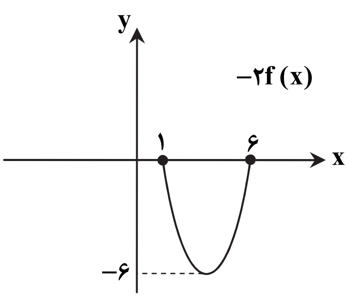
۱) $f(x-۲)+۱$ ۲) $-۲f(x)$ ۳) $f(۲x-۱)$ ۴) $f(۲-x)$









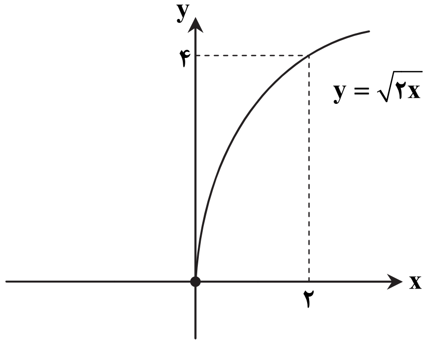


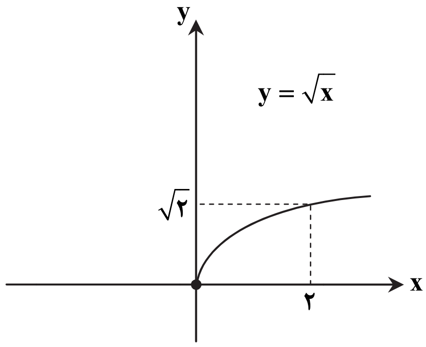
تذکر: اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $D_f=[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(kx)$ به‌صورت $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ است.

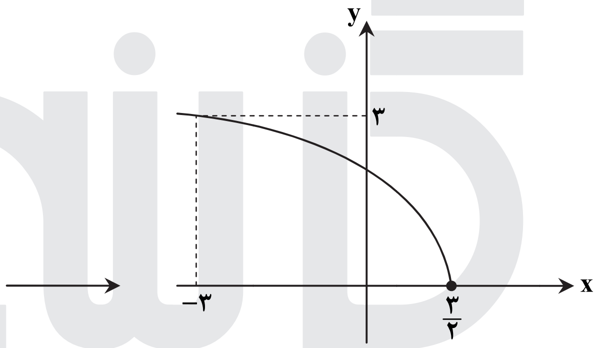
تذکر: اگر برد تابع $f(x)$ به‌صورت $R_f=[c,d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به‌صورت $[kc,kd]$ است.

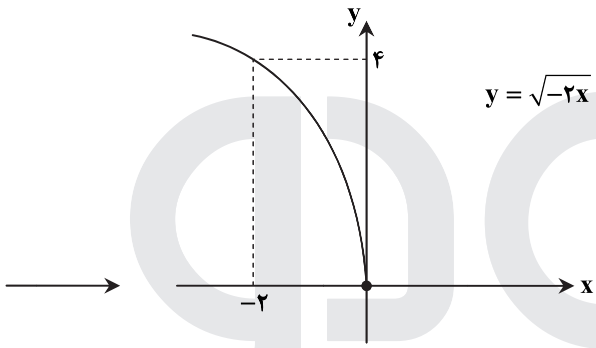
تذکر مهم: برای رسم تابع $y=f(a-bx)$ $(a>0)$ ابتدا باید نمودار تابع $f(bx)$ را رسم کرد. سپس این نمودار را نسبت به محور xها قرینه کرد تا نمودار $f(-bx)$ به‌دست آید و سپس آن را $\frac{a}{b}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم.

مثال) نمودار تابع $y=\sqrt{3-2x}$ را به کمک نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.





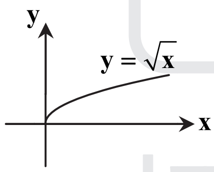




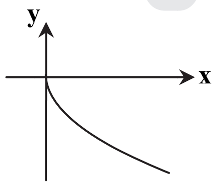
تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار $y=-2f(x)$ و $y=f(-2x)$ به‌ترتیب از کدام نواحی عبور می‌کند؟

۱) چهارم و سوم　　۲) چهارم و دوم　　۳) دوم و دوم　　۴) چهارم و چهارم

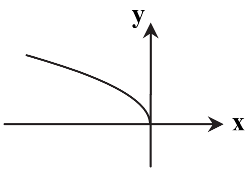
حل: نمودار $y=f(x)$ شکل مقابل است و فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور می‌کند.



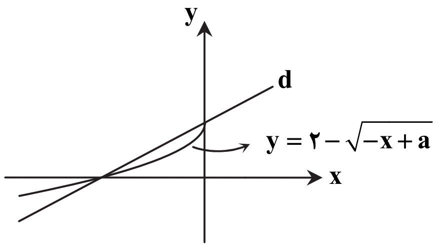
پس نمودار $y=-2f(x)=-2\sqrt{x}$ به‌شکل مقابل است که فقط از ناحیهٔ چهارم می‌گذرد.



از طرفی نمودار $y=f(-2x)=\sqrt{-2x}$ به‌شکل مقابل است که فقط از ناحیهٔ دوم می‌گذرد.



تست: نمودار تابع $y=۲-\sqrt{-x+a}$ به‌صورت مقابل است. شیب خط d کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل: دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty,۰]$ است، پس $a=۰$. (تابع روی محور طول‌ها انتقال به سمت راست و چپ نداشته است.)

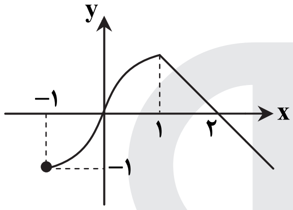
حال کافی است نقطهٔ برخورد تابع را با محور x ها و y ها به‌دست آوریم:

$y=۰ \Rightarrow ۲-\sqrt{-x}=۰ \Rightarrow \sqrt{-x}=۲ \Rightarrow -x=۴ \Rightarrow x=-۴$

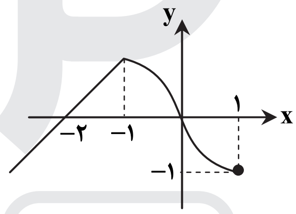
$x=۰ \Rightarrow y=۲$

پس خط d از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(-۴,۰)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{۲-۰}{۰-(-۴)}$ است.

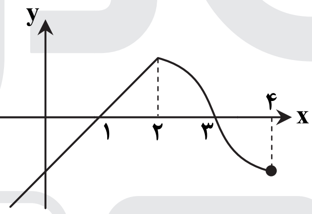
تست: اگر نمودار $y=f(۲-x)$ به‌شکل مقابل باشد، نمودار $y=f(x)$ کدام است؟



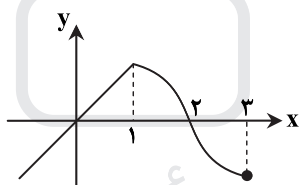
۱)



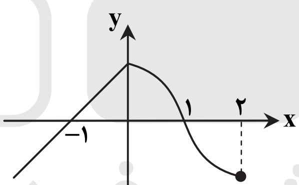
۲)



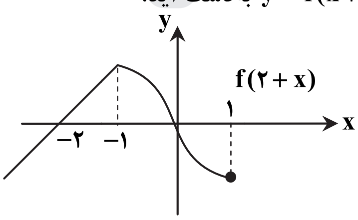
۳)



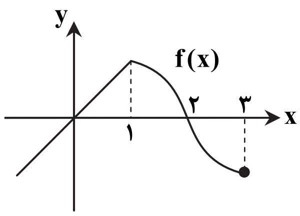
۴)



حل: با توجه به نمودار $y=f(۲-x)$، ابتدا نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+۲)$ به‌دست آید.



سپس نمودار $y=f(۲+x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x)$ به‌دست آید.

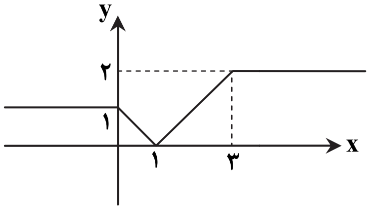


تست: اگر $A(-۱,۲)$ رأس سهمی $y=f(۱-x)$ باشد، مختصات رأس سهمی $y=۲f(x-۲)$ کدام است؟

۱) $(۴,۴)$ ۲) $(۰,۴)$ ۳) $(۲,۲)$ ۴) $(-۲,۴)$

حل: چون $A(-۱,۲)$ رأس سهمی $y=f(۱-x)$ می‌باشد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند. لذا $f(۲)=۲$. پس رأس سهمی $y=f(x)$ نقطهٔ $B(۲,۲)$ است. به همین جهت رأس سهمی $y=۲f(x-۲)$ با یک انتقال ۲ واحد به سمت راست و یک انبساط عمودی مشخص می‌شود. پس رأس آن $C(۴,۴)$ است.

تست: نمودار $y=f(x-۲)$ شکل مقابل است. تابع $y=f(-x)$ در کدام بازه به یک پاره‌خط با شیب منفی تبدیل می‌شود؟



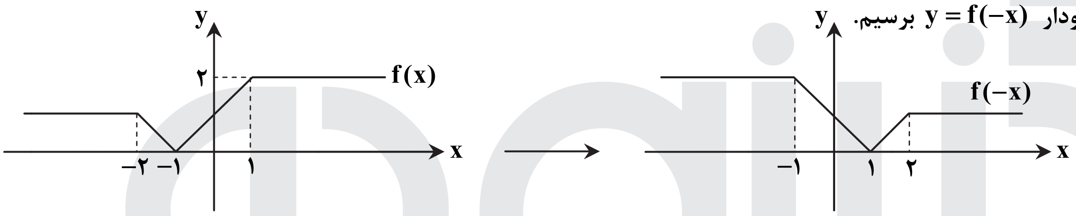
۱) $[-۲,۰]$

۲) $[-۱,۱]$

۳) $[-۳,-۱]$

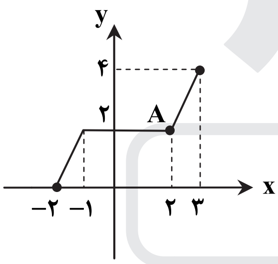
۴) $[۱,۲]$

حل: ابتدا نمودار $y=f(x-۲)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x)$ به‌دست آید. سپس f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=f(-x)$ برسیم.



با توجه به شکل، نمودار این تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ یک خط با شیب منفی است.

تست: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است. مختصات نقطهٔ متناظر A روی تابع $y=-۲f(۲x+۱)+۱$ کدام است؟



۱) $(\frac{۱}{۲},۲)$

۲) $(۲,-۳)$

۳) $(\frac{۱}{۲},-۳)$

۴) $(۱,-۳)$

حل: برای یافتن نمودار $y=-۲f(۲x+۱)+۱$ مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

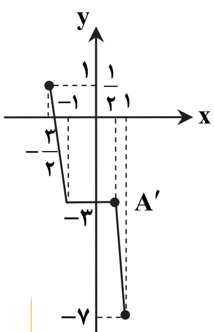
۱. نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. $(y=f(x+۱))$

۲. طول همهٔ نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. $(y=f(۲x+۱))$

۳. نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. $(y=-f(۲x+۱))$

۴. عرض نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم. $(y=-۲f(۲x+۱))$

۵. در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. $(y=-۲f(۲x+۱)+۱)$



مطابق شکل، مختصات نقطهٔ متناظر A روی نمودار بالا $A'(\frac{۱}{۲},-۳)$ است.

تست: در مورد نمودار تابع $f(x)=x^3+x+1$ به‌ترتیب اعمال «طول همهٔ نقاط را دو برابر می‌کنیم»، «قرینه نسبت به محور yها»، «عرض همهٔ نقاط را ۴ برابر می‌کنیم» و «انتقال ۴ واحدی نمودار به سمت پایین» انجام شده است. نمودار تابع حاصل از کدام ناحیهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) ناحیهٔ اول ۲) ناحیهٔ دوم ۳) ناحیهٔ سوم ۴) ناحیهٔ چهارم

حل: مرحله به مرحله، تغییرات را انجام می‌دهیم:

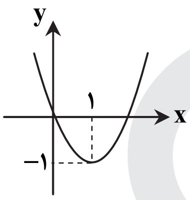
$$f(x)=x^2+x+1 \xrightarrow[\text{طول‌ها}]{\text{دو برابر کردن}} f(\frac{x}{2})=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1$$

$$\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} f(-\frac{x}{2})=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+1$$

$$\xrightarrow[\text{عرض‌ها}]{\text{۴ برابر کردن}} 4f(-\frac{x}{2})=x^2-2x+4$$

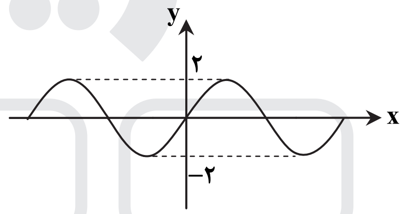
$$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{انتقال ۴ واحد}} 4f(-\frac{x}{2})-4=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

مطابق شکل، نمودار تابع حاصل، از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.

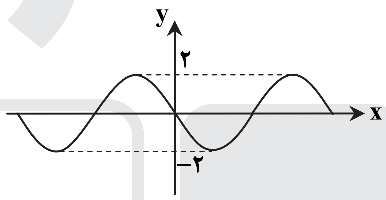


تست: اگر $f(x)=\operatorname{Cos}x$، نمودار $y=2f(\frac{\pi}{2}-x)$ در کدام گزینه آمده است؟

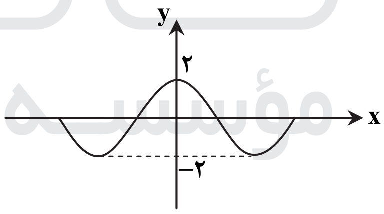
۱)



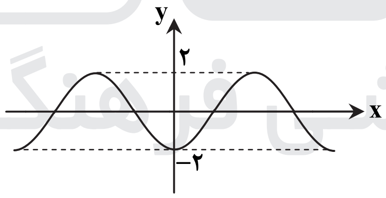
۲)



۳)



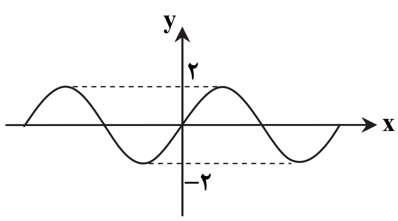
۴)



حل: تابع y را با استفاده از تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y=2f(\frac{\pi}{2}-x)=2\operatorname{Cos}(\frac{\pi}{2}-x)=2\operatorname{Sin}x$$

کافی است نمودار $y=\operatorname{Sin}x$ را با یک انبساط عمودی رسم کنیم:



تست: اگر $f(x) = \text{Sin}x$، نمودار کدام تابع فقط روی محور طول‌ها نمودار f را قطع می‌کند؟

۱) $y = 2f(\frac{\pi}{2} - x)$
۲) $y = -2 + f(\pi + x)$
۳) $y = 2f(x - \pi)$
۴) $y = 2 - f(\frac{\pi}{2} + x)$

حل: ابتدا ضابطهٔ هریک از نمودارها را ساده می‌کنیم.

$y = f(x) = \text{Sin}x$

گزینهٔ ۱) $y = 2f(\frac{\pi}{2} - x) = 2\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) = 2\text{Cos}x$

گزینهٔ ۲) $y = -2 + f(\pi + x) = -2 + \text{Sin}(\pi + x) = -2 - \text{Sin}x$

گزینهٔ ۳) $y = 2f(x - \pi) = 2\text{Sin}(x - \pi) = -2\text{Sin}x$

گزینهٔ ۴) $y = 2 - \text{Sin}(\frac{\pi}{2} + x) = 2 - \text{Cos}x$

چون قرار است فقط روی محور طول‌ها نمودار f را قطع کند، کافی است شکل حاصل انبساط عمودی از نمودار اولیه باشد، پس گزینهٔ قابل‌قبول گزینهٔ ۳ است.