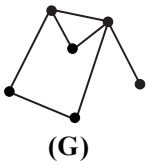


# نمونه سؤالات امتحانی نیمسال اول

## ریاضیات گسسته [رشته ریاضی و فیزیک]

### کل فصل اول و فصل ۲ درس ۱



(G)

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۲ نمره)

الف) اگر باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $7$  برابر  $3$  باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم  $3a$  بر  $7$  برابر ..... است.

ب) در گراف مقابل حاصل  $\Delta(G) + \delta(G)$  برابر با ..... است.

ج) حاصل عبارت  $(4m^2, 12m^5)$  برابر با ..... است. ( $m \in \mathbb{Z}$ )

د) رقم یکان  $3^{15}$  برابر با ..... است.

۲- با ارائه یک مثال نقض، درستی احکام زیر را رد کنید. (۱ نمره)

الف) اگر  $n$  یک عدد اول باشد، آنگاه  $3^n + 1$  عددی اول است. (ب) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد گنگ باشند،  $a^2 + b$  عددی گنگ است.

۳- با اثبات مستقیم ثابت کنید که اگر  $x$  یک عدد صحیح و مضرب  $3$  باشد، آنگاه  $x^2 + 3x$  مضرب  $18$  است. (۱ نمره)

۴- می دانیم  $\sqrt{5}$  عددی گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$  گنگ می باشد. (۱ نمره)

۵- درستی نامساوی زیر را به کمک اثبات بازگشتی بررسی کنید. (۱ نمره)

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2 \text{ و } (x > 0, y = 0)$$

۶- عدد صحیح  $n$  را چنان بیابید که رابطه  $n^2 - 3n + 3 \mid n^2 - 1$  برقرار باشد. (۱/۵ نمره)

۷- اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم  $2a^2 + 7$  بر  $8$  را بیابید. (۱ نمره)

۸- اگر در یک تقسیم  $90$  واحد به مقسوم و  $4$  واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند اما از باقی مانده  $2$  واحد کم می شود،

در این صورت خارج قسمت این تقسیم را بیابید. (۱ نمره)

۹- حاصل عبارت مقابل را بیابید. (۱ نمره)

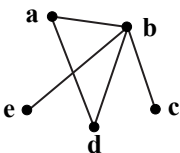
$$\left[ 5m^4, (m^3, 4m^4) \right] \text{ و } m \in \mathbb{Z}$$

۱۰- باقی مانده تقسیم  $321^852 + 839^852$  بر  $8$  را بیابید. (۱ نمره)

۱۱-  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که عدد  $3a6b2$  بر  $36$  بخش پذیر باشد. (۲/۵ نمره)

۱۲- معادله سیاله زیر را حل کنید. (۱/۵ نمره)

$$7x - 4y = 15$$



۱۳- با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. (۱ نمره)

الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.

ب)  $N_G^{[e]}$  و  $N_G^{(b)}$  را تعیین کنید.

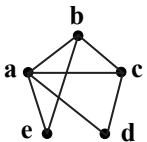
۱۴- در گراف  $4$ - منتظم مرتبه  $p$  اگر  $q = 3p - 5$  باشد،  $p$  و  $q$  را یافته و نمودار گراف را رسم کنید. (۱ نمره)

۱۵- گراف مقابل را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

الف) دو مسیر متفاوت از  $a$  به  $c$  نوشته و طول هر کدام را تعیین کنید.

ب) دو دور متفاوت نوشته و طول هر کدام را مشخص کنید.

ج) مکمل گراف را رسم کنید.



۱۶- یک گراف از مرتبه  $14$  و اندازه  $25$  فقط دارای رؤس با درجه  $3$  و  $5$  است. این گراف چند رأس از درجه  $3$  دارد؟ (۱ نمره)

## پاسخ تشریحی

## ریاضیات گسسته [رشته ریاضی و فیزیک]

۱- الف) ۲

-۲

الف)

ب)

۷ (د)

۴m<sup>۲</sup> (ج)

۵ (ب)

عدد اول نیست  $\Rightarrow 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow$  عدد اول  $n = 2$ عدد گنگ  $b = 2\sqrt{2}$  و عدد گنگ  $a = \sqrt{2} - 1$ عدد گویا  $a^2 + b = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} = 3$ 

-۳

 $x = 3k \Rightarrow x^2 + 3x = x(x+3) = 3k(3k+3) = 3k \times 3(k+1) = 9k(k+1) = 9 \times 2t = 18t$ 

ضرب دو عدد متوالی

-۴

فرض می کنیم  $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$  عدد گویایی مانند  $q$  باشد، داریم:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{5} = q \Rightarrow 2\sqrt{3} = q - \sqrt{5} \xrightarrow{\text{توان } 2} 12 = q^2 - 2q\sqrt{5} + 5 \Rightarrow 2q\sqrt{5} = q^2 - 7 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{q^2 - 7}{2q}$$

چون  $q$  عدد گویای مخالف صفر است، پس  $\frac{q^2 - 7}{2q}$  یعنی  $\sqrt{5}$  عددی گویا است و این خلاف فرض است، پس باید  $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$  گنگ باشد.

-۵

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{xy}\right) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{2xy} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

-۶

$$\left. \begin{array}{l} 2n-1 | n^2 - 3n + 3 \\ 2n-1 | 2n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2n-1 | 2(n^2 - 3n + 3) - n(2n-1) \Rightarrow 2n-1 | -5n + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 2n-1 | -5n + 6 \\ 2n-1 | 2n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2n-1 | 2(-5n + 6) + 5(2n-1) \Rightarrow 2n-1 | 7$$

$$\Rightarrow 2n-1 = \pm 1 \Rightarrow n = 1 \text{ و } n = 0 \text{ و } 2n-1 = \pm 7 \Rightarrow n = 4 \text{ و } -3$$

-۷

$$\text{فرد } a \Rightarrow a^2 = 8k + 1 \Rightarrow 2a^2 + 7 = 2(8k + 1) + 7 = 16k + 2 + 7$$

$$= 16k + 9 = 16k + 8 + 1 = 8(2k + 1) + 1 = 8q + 1 \Rightarrow \text{باقی مانده} = 1$$

-۸

$$\left. \begin{array}{l} a = bq + r \\ a + 90 = (b+4)q + r - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow bq + r + 90 = bq + 4q + r - 2 \Rightarrow 90 = 4q - 2 \Rightarrow 4q = 92 \Rightarrow q = 23$$

-۹

$$m^3 | 4m^4 \Rightarrow (m^3, 4m^4) = |m^3| \Rightarrow [\Delta m^4, (m^3, 4m^4)] = [\Delta m^4, |m^3|]$$

$$|m^3| | \Delta m^4 \Rightarrow [\Delta m^4, |m^3|] = |\Delta m^4| = \Delta m^4$$

-۱۰

$$321 \equiv 321 - 40 \times 8 \equiv 1 \text{ و } 839 \equiv 839 - 800 \equiv 39 - 5 \times 8 \equiv -1$$

$$321^{852} + 839^{52} \equiv 1^{852} + (-1)^{52} \equiv 1 + 1 \equiv 2$$

-۱۱ چون عدد داده شده بر ۳۶ بخش پذیر است، پس بر ۴ و ۹ نیز بخش پذیر است.

$$3a^4b^2 \equiv 0 \Rightarrow b^2 \equiv 0 \Rightarrow 2+10b \equiv 0 \Rightarrow 10b \equiv -2 \Rightarrow (10-8)b \equiv -2+4 \Rightarrow 2b \equiv 2 \text{ و } (2,4)=2 \Rightarrow b \equiv 1$$

$$\Rightarrow b = 2k+1 \Rightarrow b = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$3a^9b^2 \equiv 0 \Rightarrow 3+a+6+b+2 \equiv 0 \Rightarrow a+b \equiv -11 \Rightarrow a+b \equiv -11+2 \times 9 \equiv 7$$

$$a=1 \Rightarrow b \equiv 6 \Rightarrow b=9k+6 \Rightarrow b=6$$

$$a=3 \Rightarrow b \equiv 4 \Rightarrow b=9k+4 \Rightarrow b=4$$

$$a=5 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b=9k+2 \Rightarrow b=2$$

$$a=7 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b=9k \Rightarrow b=0 \text{ و } b=9$$

$$a=9 \Rightarrow b \equiv -2+9 \equiv 7 \Rightarrow b=9k+7 \Rightarrow b=7$$

-۱۲

$$7x - 4y = 15 \Rightarrow (7, 4) = 1 \mid 15 \Rightarrow \text{معادله جواب دارد}$$

$$7x - 15 = 4y \Rightarrow 7x \equiv 15 \Rightarrow (7-8)x \equiv 15 \Rightarrow -x \equiv 15$$

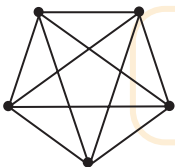
$$x \equiv -15 + 16 \equiv 1 \Rightarrow \boxed{x = 4k + 1} \text{ و } 7x - 4y = 15 \Rightarrow 7(4k+1) - 4y = 15$$

$$7 \times 4k + 7 - 4y = 15 \Rightarrow 28k - 8 = 4y \Rightarrow \boxed{y = 7k - 2}$$

$$N_G(b) = \{a, e, d, c\} \text{ و } N_G[e] = \{e, b\} \text{ (ب)}$$

$$q = 5 \text{ و } p = 5 \text{ (الف)}$$

-۱۴



$$\begin{aligned} 4 \text{ منتظم} \Rightarrow 4p = 2q \Rightarrow q = 2p \text{ و } q = 3p - 5 \\ \Rightarrow 2p = 3p - 5 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow q = 10 \end{aligned}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

-۱۵

(الف)

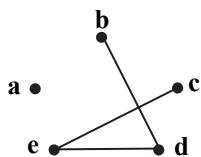
$$abc \Rightarrow \text{طول مسیر} = 2$$

$$aebc \Rightarrow \text{طول مسیر} = 3$$

(ب)

$$abca \Rightarrow \text{طول دور} = 3 \text{ و } abcd \Rightarrow \text{طول دور} = 4$$

(ج)



-۱۶

$$p = 14 \text{ و } q = 25 \Rightarrow \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{14-x}, \underbrace{3, \dots, 3}_x$$

$$\text{مجموع درجات} = 2q \Rightarrow (14-x) \times 5 + 3x = 2 \times 25 \Rightarrow 70 - 5x + 3x = 50 \Rightarrow 20 = 2x \Rightarrow x = 10$$