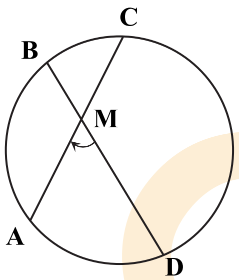
نمونه سؤالات امتحانی نیمسال اول

هندسه ۲ [رشتهٔ ریاضی و فیزیک]

فصل او فصل ۲ درس ا تا ابتدای «تجانس»

۱- ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان مقابل به آن زاویه است. (۱/۵ نمره)

۲- در شکل مقابل ثابت کنید $A\hat{M}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$ (۱ نمره)



۳- هرگاه M نقطه‌ای خارج دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، ثابت کنید مربع اندازهٔ مماس برابر با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع است. (۱/۲۵ نمره)

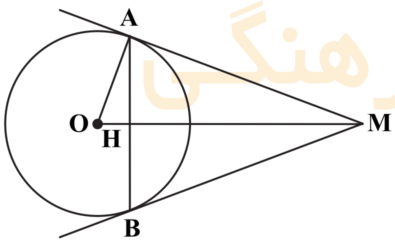
۴- ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است. (۱ نمره)

۵- ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند. (۱ نمره)

۶- اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، ثابت کنید. (۱ نمره)

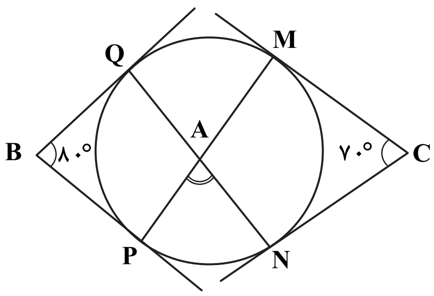
$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

۷- در شکل مقابل، MA و MB مماس بر دایرهٔ $C(O,۴)$ در نقاط A و B می‌باشند و H محل برخورد AB و OM است. اگر $OH = ۲$ باشد، اندازهٔ MA و OM را بیابید. (۱ نمره)

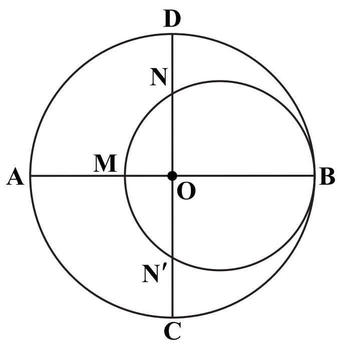


۸- دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۴ و خط‌المرکزین $d = ۲x - ۵$ مفروض است. حدود x را چنان بیابید که دو دایره متقاطع باشند. (۱ نمره)

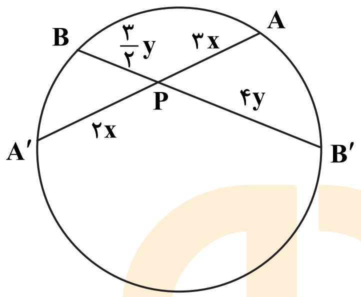
۹- در شکل مقابل اضلاع زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ بر دایره مماس هستند، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟ (۱/۵ نمره)



۱۰- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)



۱۱- در شکل مقابل، اگر $3AA' = 4BB' - 14$ باشد، مقادیر x و y را بیابید. (۱/۲۵ نمره)



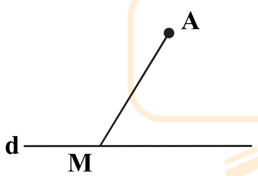
۱۲- در دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با خط‌المرکزین $OO' = d$ اندازهٔ مماس مشترک خارجی را برحسب R، R' و d به‌دست آورید. (۱ نمره)

۱۳- مفاهیم زیر را تعریف کنید. (۱ نمره)

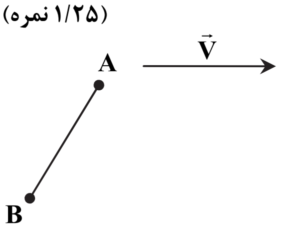
الف) نقطهٔ ثابت تبدیل ب) تبدیل طولپا (ایزومتری)

۱۴- ثابت کنید در هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود. (۱ نمره)

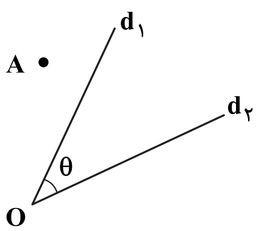
۱۵- در شکل زیر بازتاب MA نسبت به خط d را رسم کرده و ثابت کنید اندازهٔ تصویر آن با MA برابر است. (۱/۵ نمره)



۱۶- اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{V}$ موازی نباشد، انتقال‌یافتهٔ AB را با بردار $\vec{V}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید، ثابت کنید: $AB = A'B'$ (۱/۲۵ نمره)



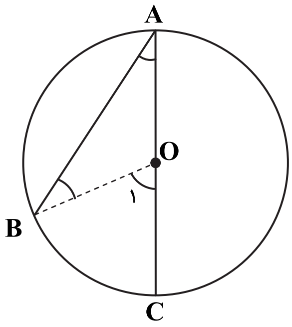
۱۷- در شکل مقابل، بازتاب A نسبت به d_1 را یافته و A' بنامید. سپس بازتاب A' را نسبت به d_2 یافته و A'' بنامید. ثابت کنید A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و زاویهٔ 2θ است. (۱/۲۵ نمره)



پاسخ تشریحی

هندسه ۲ [رشتهٔ ریاضی و فیزیک]

۱- اگر یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی از مرکز دایره بگذرد، طبق شکل مقابل با وصل کردن B به O داریم:

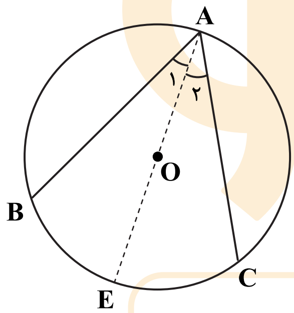


$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \text{زاویهٔ خارجی مثلث } OAB\ \ \hat{O}_۱ = \hat{A} + \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱}{۲}\hat{O}_۱ \qquad (۱)$$

با توجه به این‌که $\hat{O}_۱$ زاویهٔ مرکزی است، داریم:

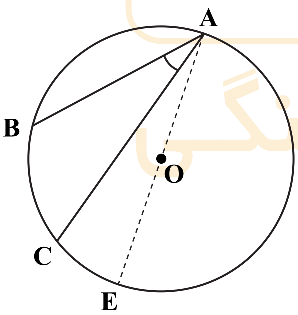
$$\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{BC} \xrightarrow{(۱)} \hat{A} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$

اگر اضلاع زاویهٔ محاطی در طرفین مرکز باشند، داریم:



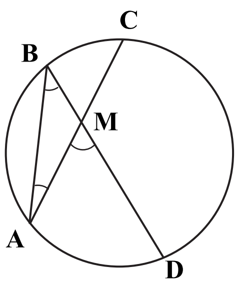
$$B\hat{A}C = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE} + \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EC} = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EC}) \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BEC}$$

اگر اضلاع زاویهٔ محاطی در یک طرف مرکز باشند، داریم:



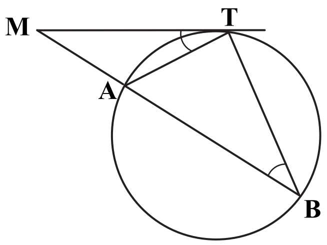
$$B\hat{A}C = B\hat{A}E - C\hat{A}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BCE} - \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CE} = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BCE} - \overset{\frown}{CE}) \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$

۲-



$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویهٔ خارجی مثلث } ABM\ \ A\hat{M}D = \hat{A} + \hat{B} \\ \text{محاطی}\ \ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \text{محاطی}\ \ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{M}D = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

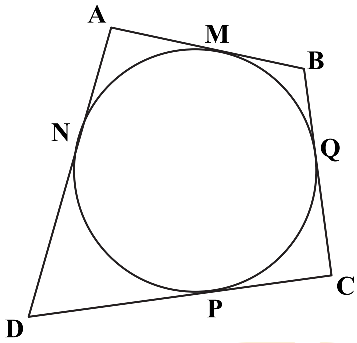
۳-



$$\left.\begin{array}{l} M\hat{T}A = \hat{B} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}T \sim M\overset{\triangle}{B}T$$

$$\frac{MT}{MB} = \frac{AM}{MT} = \frac{AT}{BT} \Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{AM}{MT} \Rightarrow MT^{۲} = MA \cdot MB$$

۴- می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازهٔ دو مماس برابرند.



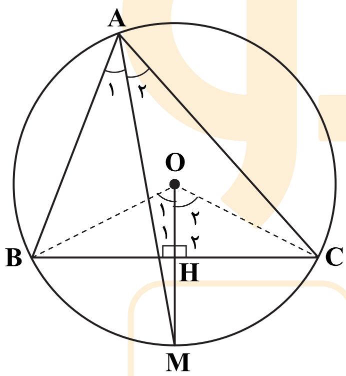
$$\left.\begin{array}{l} AM = AN \\ BM = BQ \\ DP = DN \\ CP = CQ \end{array}\right\} +$$

$$AM + BM + DP + CP = AN + BQ + DN + CQ$$

$$\Rightarrow AM + BM + DP + CP = AN + DN + BQ + CQ$$

$$\Rightarrow AB + DC = AD + BC$$

۵- عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی را در M قطع کند. M را به A وصل می‌کنیم، باید ثابت کنیم AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است. عمودمنصف وتر BC قطعاً از مرکز دایره می‌گذرد، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OH = OH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ BH = CH \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{B}H \underset{\text{ض‌زض}}{\cong} O\overset{\triangle}{C}H \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM} \\ \hat{A}_۱ = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BM} \\ \hat{A}_۲ = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CM} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

۶-

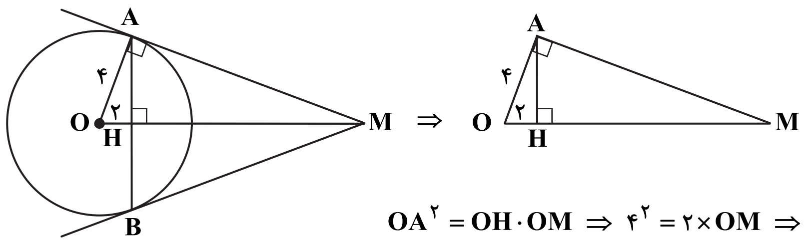
p نصف محیط است.

$$r_a = \frac{S}{p-a} \text{ و } r_b = \frac{S}{p-b} \text{ و } r_c = \frac{S}{p-c} \text{ و } r = \frac{S}{p}$$

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{\frac{S}{p-a}} + \frac{۱}{\frac{S}{p-b}} + \frac{۱}{\frac{S}{p-c}} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{۳p-a-b-c}{S} = \frac{۳p-(a+b+c)}{S} = \frac{۳p-۲p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{\frac{S}{p}} = \frac{۱}{r}$$

۷-



می‌دانیم OM عمودمنصف AB است.

طبق روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$OA^{۲} = OH \cdot OM \Rightarrow ۴^{۲} = ۲ \times OM \Rightarrow \boxed{OM = ۸}$$

$$OA^{۲} + MA^{۲} = OM^{۲} \Rightarrow ۴^{۲} + MA^{۲} = ۸^{۲} \Rightarrow MA^{۲} = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$$

$$MA = \sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \boxed{MA = ۴\sqrt{۳}}$$

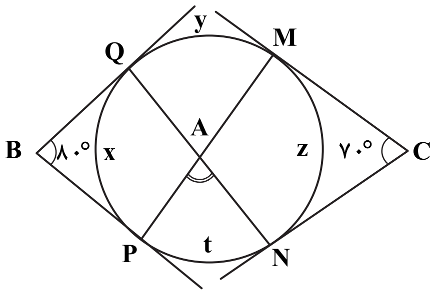
۸-

$R_۱=۷$ و $R_۲=۴$ و $d=۲x-۵$

دو دایرهٔ متقاطع $\Rightarrow R_۱-R_۲<d<R_۱+R_۲ \Rightarrow ۷-۴<۲x-۵<۷+۴$

$۳<۲x-۵<۱۱ \xrightarrow{+۵} ۸<۲x<۱۶ \Rightarrow \boxed{۴<x<۸}$

۹-



$\widehat{PQ}=x$ و $\widehat{QM}=y$ و $\widehat{MN}=z$ و $\widehat{PN}=t$

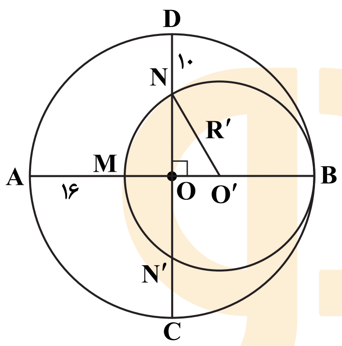
$\hat{C}=\frac{y+x+t-z}{۲} \Rightarrow \frac{x+y+t-z}{۲}=۷۰^\circ \Rightarrow x+y+t-z=۱۴۰^\circ \quad (۱)$

$\hat{B}=\frac{y+z+t-x}{۲} \Rightarrow \frac{y+z+t-x}{۲}=۸۰^\circ \Rightarrow y+z+t-x=۱۶۰^\circ \quad (۲)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow x+y+t-z+y+z+t-x=۳۰۰^\circ \Rightarrow ۲(y+t)=۳۰۰^\circ$

$\Rightarrow y+t=۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=\frac{y+t}{۲}=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$

۱۰-



اگر شعاع دایرهٔ کوچک را R' و شعاع دایرهٔ بزرگ را R در نظر بگیریم، چون دو دایره مماس داخل هستند، پس:

$OO'=R-R'$

$ON=R-۱۰$ و $OM=R-۱۶$

$O'M=OO'+OM \Rightarrow R'=R-R'+R-۱۶ \Rightarrow ۲R'=۲R-۱۶ \Rightarrow R'=R-۸$

$\Rightarrow R-R'=۸$ ، $OO'=R-R' \Rightarrow OO'=۸$

$ON^۲+OO'^۲=O'N^۲ \Rightarrow (R-۱۰)^۲+۸^۲=R'^۲$ و $R'=R-۸$

$R^۲-۲۰R+۱۰۰+۶۴=(R-۸)^۲ \Rightarrow R^۲-۲۰R+۱۶۴=R^۲-۱۶R+۶۴$

$\Rightarrow ۱۰۰=۴R \Rightarrow R=۲۵$ و $R'=۲۵-۸=۱۷$

۱۱-

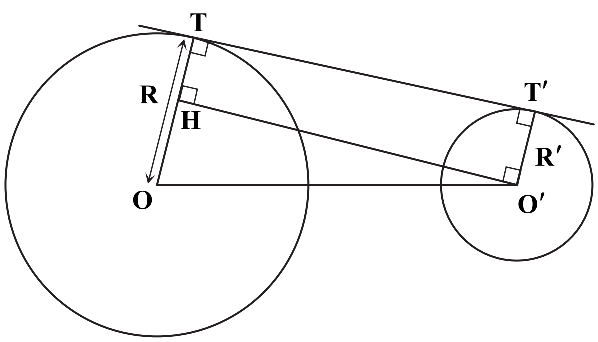
$AA'=۲x+۳x=۵x$ و $BB'=\frac{۳}{۲}y+۴y=\frac{۱۱}{۲}y$

$۳AA'=۴BB'-۱۴ \Rightarrow ۱۵x=۲۲y-۱۴ \quad (۱)$

$PA\cdot PA'=PB\cdot PB' \Rightarrow ۲x\times ۳x=۴y\times\frac{۳}{۲}y \Rightarrow ۶x^۲=۶y^۲$

$\Rightarrow x^۲=y^۲ \Rightarrow y=x \xrightarrow{(۱)} ۱۵x=۲۲x-۱۴ \Rightarrow ۱۴=۲۲x-۱۵x \Rightarrow ۷x=۱۴ \Rightarrow \boxed{x=۲}$ و $\boxed{y=۲}$

۱۲-



در شکل مقابل، از O' خطی موازی مماس مشترک خارجی TT' رسم می‌کنیم تا OT را در H قطع کند. با توجه به این‌که شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است، پس چهارضلعی $O'HTT'$ دارای ۴ زاویهٔ قائمه است و بنابراین مستطیل می‌باشد.

$TH=O'T'=R'$ و $O'H=TT'$

$OH=OT-TH=R-R'$ و $\overset{\triangle}{OHO'}:OH^۲+O'H^۲=OO'^۲$

$\Rightarrow (R-R')^۲+TT'^۲=d^۲ \Rightarrow TT'^۲=d^۲-(R-R')^۲$

$\Rightarrow TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

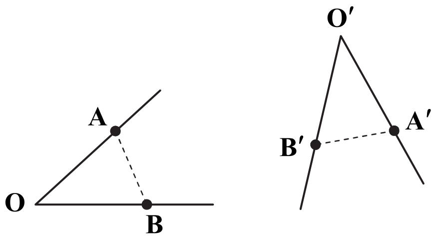
۱۳-

الف) نقطهٔ ثابت تبدیل: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق شود را نقطهٔ ثابت تبدیل می‌گویند.

ب) تبدیل طولپا: تبدیلی که فاصلهٔ بین نقاط را حفظ می‌کند.

۱۴-

در شکل مقابل اگر زاویهٔ $A'\hat{O}'B'$ تبدیل‌یافتهٔ زاویهٔ $A\hat{O}B$ تحت یک تبدیل طولپا باشد، داریم:

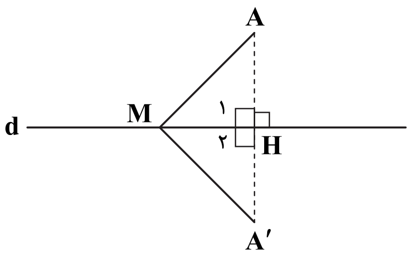


$T(O)=O'$ و $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$

$$\left.\begin{array}{l} OA=O'A' \\ OB=O'B' \\ AB=A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{A}B \cong O'\overset{\triangle}{A'}B' \Rightarrow \hat{O}=\hat{O}'$$

۱۵-

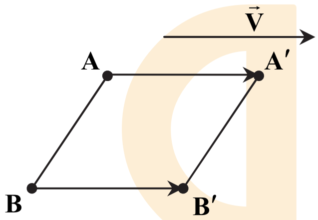
در شکل مقابل، A' بازتاب A نسبت به خط d است. با توجه به این‌که بازتاب نقطهٔ M نسبت به خط d خود نقطهٔ M است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ AH=A'H \\ MH=MH \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}H \cong M\overset{\triangle}{A'}H \Rightarrow AM=A'M$$

۱۶-

از A و B دو بردار برابر با $\vec{V}$ رسم می‌کنیم تا نقاط A' و B' حاصل شوند. A' و B' انتقال‌یافتهٔ A و B تحت بردار $\vec{V}$ هستند، پس داریم:



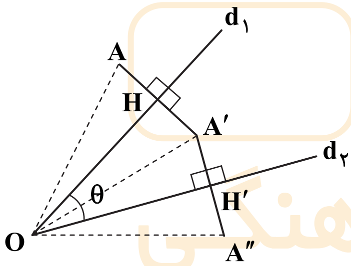
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AA'}=\vec{V} \\ \overrightarrow{BB'}=\vec{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AA'=BB' \\ AA' \parallel BB' \end{array}\right.$$

می‌دانیم چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی هستند، متوازی‌الاضلاع است، پس:

$AA'=BB'$ و $AA' \parallel BB'$ $\Rightarrow$ $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow AB=A'B'$

۱۷-

A' بازتاب A نسبت به خط d_1 و A'' بازتاب A' نسبت به خط d_2 است، طبق ویژگی بازتاب داریم:



AA' عمودمنصف d_1 $\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} OA=OA' & (1) \\ A\hat{O}H=A'\hat{O}H \Rightarrow A\hat{O}A'=2A'\hat{O}H & (2) \end{array}\right.$

$A'A''$ عمودمنصف d_2 $\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} OA'=OA'' & (3) \\ A'\hat{O}H'=A''\hat{O}H' \Rightarrow A'\hat{O}A''=2A'\hat{O}H' & (4) \end{array}\right.$

$$A\hat{O}A''=A\hat{O}A'+A'\hat{O}A'' \xrightarrow{(2),(4)} A\hat{O}A''=2A'\hat{O}H+2A'\hat{O}H'$$

$$A\hat{O}A''=2(A'\hat{O}H+A'\hat{O}H')=2\theta$$

(۱) و (۳) $\Rightarrow OA=OA''$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت که A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و اندازهٔ زاویهٔ 2θ است.