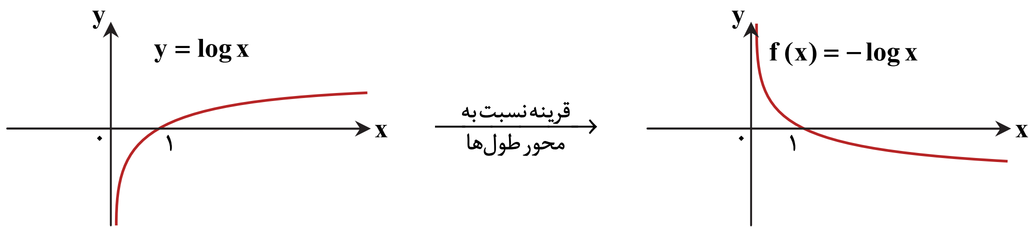
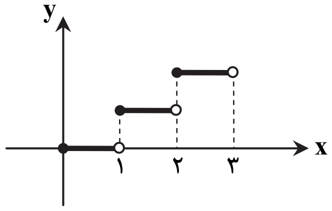
۱-

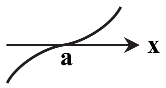
الف) درست؛ با توجه به نمودار $f(x)$ مشاهده می‌شود این تابع اکیداً نزولی است.



ب) نادرست؛ تابع f روی بازهٔ $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؛ زیرا در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه مشتق چپ ندارد.



ج) نادرست؛ زیرا ممکن است $f'(a)=۰$، ولی تابع f در $x=a$ اکسترمم نباشد.



۲-

الف) ۴؛ زیرا:

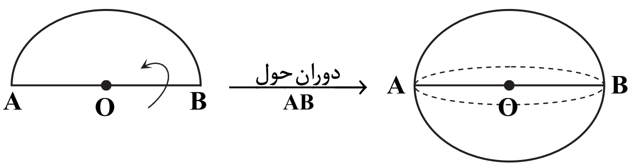
$$(f^{-۱}og^{-۱})(۷)=f^{-۱}(g^{-۱}(۷))$$

$$g^{-۱}(۷)=a \Rightarrow g(a)=۷ \Rightarrow a^{۳}-۱=۷ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f^{-۱}(g^{-۱}(۷))=f^{-۱}(a)=f^{-۱}(۲)=۴$$

ب) ۲۸؛ زیرا:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u) \Rightarrow y=f(x^{۲}+۱) \Rightarrow y'=۲xf'(x^{۲}+۱) \xrightarrow{x=۲} y'=۴f'(۵)=۲۸$$

ج) کره



۳-

الف) گزینهٔ ۱؛ زیرا:

$$\cos ۲\alpha = ۱-۲\sin^{۲}\alpha \Rightarrow \cos ۲\alpha = ۱-۲(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

ب) گزینهٔ ۳

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow p(-۲)=۳m \Rightarrow -۸+۸-۲m-۵=۳m \Rightarrow ۵m=-۵ \Rightarrow m=-۱$$

۴-

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>۰$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد.

اگر $k<۰$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{۱}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۱}$ سه واحد به‌سمت چپ انتقال پیدا کرده است، پس باید به‌جای x، $x+۳$ قرار دهیم:

$$y=\sqrt{۲x+۱} \xrightarrow[x\to x+۳]{\text{سه واحد به چپ}} y=\sqrt{۲(x+۳)+۱} \Rightarrow y=\sqrt{۲x+۷}$$

از طرفی نمودار تابع حاصل با ضریب ۲ انبساط افقی پیدا کرده است؛ یعنی طول نقاط ۲ برابر شده است، پس باید x را به $\frac{x}{۲}$ تبدیل کنیم:

$$y=\sqrt{۲x+۷} \xrightarrow[x\to \frac{x}{۲}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۲}} y=\sqrt{۲(\frac{x}{۲})+۷} \Rightarrow y=\sqrt{x+۷}$$

پس ضابطهٔ تابع جدید به‌صورت $y=\sqrt{x+۷}$ است.

۵-

نکته: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۲۵-x^۲}\Rightarrow ۲۵-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۲۵\Rightarrow -۵\leq x\leq ۵\Rightarrow D_f=[-۵,۵]$$

$$g(x)=\frac{x}{x-۴}\Rightarrow x-۴\neq ۰\Rightarrow x\neq ۴\Rightarrow D_g=R-\{۴\}$$

$$D_{gof}=\{x\in[-۵,۵] \mid \sqrt{۲۵-x^۲}\neq ۴\}$$

(۱)

اکنون داریم:

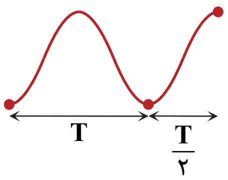
$$\sqrt{۲۵-x^۲}\neq ۴\Rightarrow ۲۵-x^۲\neq ۱۶\Rightarrow x^۲\neq ۹\Rightarrow x\neq \pm ۳ \quad (۲) \qquad (۱)\cap(۲)\Rightarrow D_{gof}=[-۵,۵]-\{\pm ۳\}$$

۶-

نکته: توابع $y=a\text{Sin}bx+c$ و $y=a\text{Cos}bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

نقطهٔ مینیمم تابع روی محور عرض‌ها قرار دارد. پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\text{Cos}bx+c$ با شرط $a<۰$ است. اکنون داریم:

$$\begin{cases}\max=c+|a|=۳\\ \min=c-|a|=-۱\end{cases}\Rightarrow ۲c=۲\Rightarrow c=۱\Rightarrow |a|=۲\xrightarrow{a<۰} a=-۲$$



با توجه به نمودار تابع، $\frac{۳}{۲}$ دورهٔ تناوب برابر ۶ است، بنابراین داریم:

$$\frac{۳}{۲}T=۶\Rightarrow T=۴\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۲}$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=-۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}x)+۱$ است.

۷-

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Cos}\,x=\text{Cos}\,\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\text{Sin}^۲x=۱-\text{Cos}^۲x$ داریم:

$$۲\text{Sin}^۲x+۵\text{Cos}\,x+۱=۰\Rightarrow ۲(۱-\text{Cos}^۲x)+۵\text{Cos}\,x+۱=۰\Rightarrow ۲-۲\text{Cos}^۲x+۵\text{Cos}\,x+۱=۰\Rightarrow ۲\text{Cos}^۲x-۵\text{Cos}\,x-۳=۰$$

با فرض $\text{Cos}\,x=t$ داریم:

$$۲t^۲-۵t-۳=۰\xrightarrow{\Delta=۴۹} t=\frac{۵\pm ۷}{۴}\Rightarrow t=۳\ ,\ t=-\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}\text{Cos}\,x=۳ \quad \text{غ ق ق} \quad (-۱\leq \text{Cos}\,x\leq ۱)\\ \text{Cos}\,x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{Cos}\,x=\text{Cos}\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

۸-

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=۰$. در این حالت برای محاسبهٔ حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

الف) $$\lim_{x\to ۴}\left(\frac{x-\sqrt{۲x+۸}}{x^۲-۴x}\times\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+\sqrt{۲x+۸}}\right)=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۲x-۸}{(x^۲-۴x)(x+\sqrt{۲x+۸})}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۲)}{x(x-۴)(x+\sqrt{۲x+۸})}=\frac{۶}{۴\times ۸}=\frac{۳}{۱۶}$$

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفراست. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳+x}{۴x^۲-x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{-x^۳}=-۲$$

-۹

نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ در این صورت اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

وقتی $x\to ۳^-$، $[x]=۲$ است؛ بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{۲[x]+a}{x^۲-۹}=\dfrac{۴+a}{۰^-}=+\infty$

با توجه به اینکه حاصل حد برابر $+\infty$ است، پس باید علامت صورت کسر منفی باشد؛ بنابراین:

$$۴+a<۰ \Rightarrow a<-۴$$

-۱۰

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

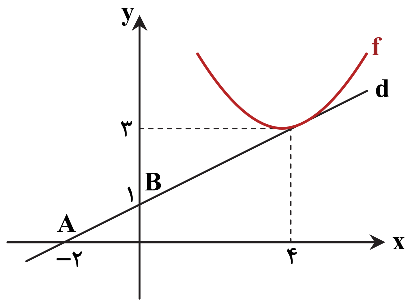
$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

ابتدا شیب خط d و معادلهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}A(-۲,۰)\\B(۰,۱)\end{cases}\Rightarrow m_d=\frac{۱-۰}{۰+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{معادلهٔ خط } d: y=\frac{۱}{۲}x+۱$$

$$y=\frac{۱}{۲}x+۱\xrightarrow{x=۴} y=۳\Rightarrow f(۴)=۳$$



شیب خط d با $f'(۴)$ برابر است. بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-۳}{۲h}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}=\frac{۱}{۲}f'(۴)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

-۱۱

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، fg و $\dfrac{f}{g}\ (g(a)\neq ۰)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد: $y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$

الف) $f'(x)=\left(\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}\right)(x^۳-۲x)^۳+۳(x^۳-۲x)^۲(۳x^۲-۲)(\sqrt{۳x+۱})$

ب) $g'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\right)(x^۲-۱)-(۲x)(\sqrt[۳]{x}+۲)}{(x^۲-۱)^۲}$

-۱۲

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ } x=a=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$\text{آهنگ متوسط در بازهٔ } [-۱,۲]=\frac{f(۲)-f(-۱)}{۲+۱}=\frac{۱-(-۲)}{۳}=۱$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر}=f'(x)=\frac{۲(x+۲)-۱(۲x)}{(x+۲)^۲}=\frac{۴}{(x+۲)^۲}\Rightarrow f'(a)=\frac{۴}{(a+۲)^۲}$$

$$\frac{۴}{(a+۲)^۲}=۱\Rightarrow (a+۲)^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}a+۲=۲\Rightarrow a=۰\\a+۲=-۲\Rightarrow a=-۴\end{cases}$$

-۱۳

نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم c طولِ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد:

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن‌گاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^۳ + ۲x^۲ + x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۴x + ۱$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۴} x = \frac{-۴ \pm ۲}{۶} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}\ ,\ x = -۱$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۲۷} + \frac{۲}{۹} - \frac{۱}{۳} = -\frac{۴}{۲۷}\quad ,\quad f(-۱) = -۱ + ۲ - ۱ = ۰$$

اکنون با رسم جدول تغییرات اکسترمم‌های نسبی تابع را مشخص می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ اکیداً صعودی	۰	↘ اکیداً نزولی	$-\frac{۴}{۲۷}$	↗ اکیداً صعودی	$+\infty$

$\Rightarrow$ $A(-۱,۰)$ ماکزیمم نسبی و $B(-\frac{۱}{۳}, -\frac{۴}{۲۷})$ مینیمم نسبی

-۱۴

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ $[a,b]$ مراحل زیر انجام می‌شود.

۱) مشتق تابع را به‌دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲) مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳) در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به‌دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

$$xy = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{x} \qquad (۱)$$

با فرض $P(x) = ۳x + ۲y$ داریم:

$$(۱) \Rightarrow P(x) = ۳x + ۲(\frac{۲۴}{x}) = ۳x + \frac{۴۸}{x} \Rightarrow P'(x) = ۳ - \frac{۴۸}{x^۲}$$

$$P'(x) = ۰ \Rightarrow ۳ = \frac{۴۸}{x^۲} \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \xrightarrow{x>۰} x = ۴ \xrightarrow{(۱)} y = ۶$$

دقت کنید می‌توان مسئله را برحسب y نیز حل کرد:

$$xy = ۲۴ \Rightarrow x = \frac{۲۴}{y} \qquad (۱)$$

$$P(x) = ۳x + ۲y \xrightarrow{(۱)} P(x) = ۳(\frac{۲۴}{y}) + ۲y = \frac{۷۲}{y} + ۲y \Rightarrow P'(x) = -\frac{۷۲}{y^۲} + ۲$$

$$P'(x) = ۰ \Rightarrow ۲ = \frac{۷۲}{y^۲} \Rightarrow y^۲ = ۳۶ \xrightarrow{y>۰} y = ۶ \xrightarrow{(۱)} x = ۴$$

-۱۵

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم‌قطر بزرگ را a، اندازهٔ نیم‌قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آن‌گاه: $a^۲ = b^۲ + c^۲$

با توجه به شکل داریم: MFF' محیط مثلث $= MF + MF' + FF' = ۱۶ \quad (*)$

F و F' کانون‌های بیضی هستند، پس $FF' = ۲c$، از طرفی M روی بیضی است بنابراین: $MF + MF' = ۲a$

$$(*) \Rightarrow ۲a + ۲c = ۱۶ \Rightarrow a + c = ۸ \qquad (۱)$$

خروج از مرکز بیضی ۰/۶ است، بنابراین: $e = \frac{c}{a} = ۰/۶ \Rightarrow c = ۰/۶a \xrightarrow{(۱)} a + ۰/۶a = ۸ \Rightarrow a = ۵ \xrightarrow{(۱)} c = ۳$

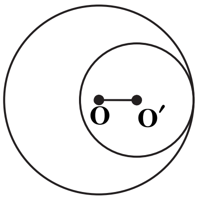
اکنون مقدار b را به‌دست می‌آوریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = ۴$

-۱۶

نکته: رابطهٔ $(x-a)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

نکته: اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. شعاع این دایره برابر است با: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکته: دایره‌های $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ مفروض‌اند اگر $(r>r')$ $OO'=r-r'$، آن‌گاه دو دایرهٔ مماس درون هستند.



ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$C: x^2+y^2-4x-12=0 \Rightarrow O(2,0)\ ,\ r=\frac{1}{2}\sqrt{16+0+48}=4$$

$$C': (x+1)^2+(y-m)^2=81 \Rightarrow O'(-1,m)\ ,\ r'=\sqrt{81}=9$$

اکنون داریم:

$$OO'=\sqrt{(-1-2)^2+(m-0)^2}=\sqrt{9+m^2}$$

دو دایرهٔ مماس درون هستند، بنابراین:

$$OO'=r'-r \Rightarrow \sqrt{9+m^2}=5 \Rightarrow 9+m^2=25 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

-۱۷

راه‌حل اول:

نکته: در حالت کلی A_1، A_2، ... و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

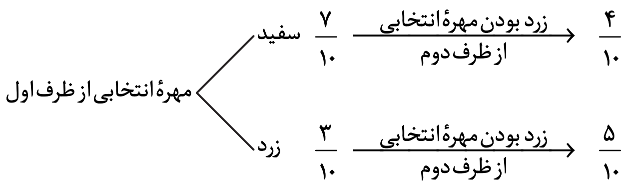
مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول، سفید یا زرد است که احتمال آن به‌ترتیب $P(A_1)=\frac{7}{10}$ و $P(A_2)=\frac{3}{10}$

اگر پیشامد انتخاب مهرهٔ زرد از ظرف دوم برابر B باشد، داریم:

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2) \Rightarrow P(B)=\frac{7}{10}\times\underbrace{\frac{4}{10}}_{\text{۴ مهرهٔ زرد}}+\frac{3}{10}\times\underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{۵ مهرهٔ زرد}}=\frac{43}{100}$$

راه‌حل دوم:

با استفاده از نمودار درختی داریم:



احتمال پیشامد B $=\frac{7}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{28}{100}+\frac{15}{100}=\frac{43}{100}$