گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

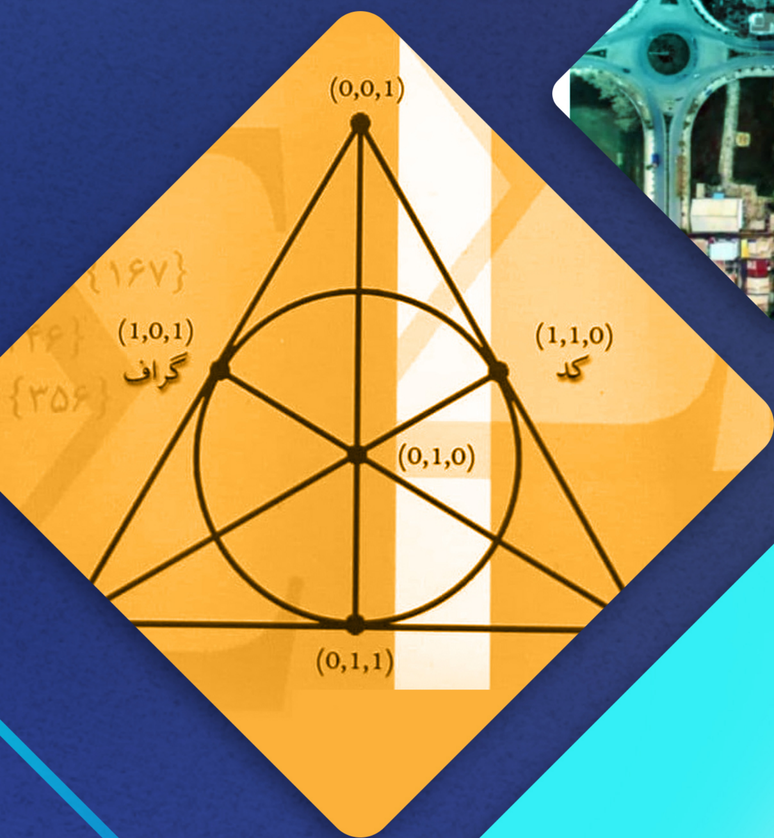
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

آذر ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

ریاضیات گسسته (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۴-۱۴۰۵

اسامی هیئت‌علمی ارزشیابی‌های تشریحی مؤسسه گزینه‌دو
در سال تحصیلی ۱۴۰۵_۱۴۰۴

- معاون تولید محتوا: **علی الفتی**
- مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: **محمد حسین کشانی**

گروه ریاضی

مدیر گروه: سید امیرمحمد سید شاکری

	مسئول درس	طراحان	
حسابان و ریاضی پایه	**مسئول درس:** علیرضا فاطمی	حسین شفیع زاده	سید امیرمحمد سید شاکری
هندسه	**مسئول درس:** محمد تقی‌پور	سعید اکبرزاده	امیدرضا پورحسینی
ریاضیات گسسته	**مسئول درس:** حسین اسدزاده	سعید اکبرزاده	امیررضا پورحسینی
ریاضی تجربی	**مسئول درس:** امیرحسین شریفیان	ایمان اردستانی	محمد خان‌گلدی
ریاضی انسانی	**مسئول درس:** حسین اسدزاده	سعید اکبرزاده	امیدرضا پورحسینی

گروه علوم

مدیر گروه: محمد حسین کشانی

	مسئول درس	طراحان	
زیست شناسی	**مسئول درس:** علی جوهری	منصوره رئیس‌دانا	علی جوهری
فیزیک	**مسئول درس:** علی کنی	احمد رضوانی	یوسف صباغی
شیمی	**مسئول درس:** محمد وحیدی	بابک اسفندی	سبحان دقیق
زمین شناسی	**مسئول درس:** شکیبا کریمی	حسن علی‌محمدی	

gozine2.ir

اسامی هیئت‌علمی ارزشیابی‌های تشریحی مؤسسه گزینه‌دو در سال تحصیلی ۱۴۰۵_۱۴۰۴

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

- معاون تولید محتوا: **علی الفتی**
- مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: **محمد حسین کشانی**

گروه عمومی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

		طراحان
ادبیات فارسی	**مسئول درس:** محسن ابراهیم‌تهرانی	افشین محی‌الدین
دین و زندگی	**مسئول درس:** زهرا محمدی	علی‌اکبر آخوندی، زهرا محمدی
زبان انگلیسی	**مسئول درس:** سعید ابراهیمی	علی عاشوری، سعید ابراهیمی

گروه انسانی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

		طراحان
علوم و فنون ادبی	**مسئول درس:** فاطمه اکران	گلاویژ جلالی، مهراوه مجتهد
جامعه شناسی	**مسئول درس:** الهام رضایی **دستیار:** فاطمه صفری	فروغ تیموریان، آزیتا بیدقی
روان شناسی	**مسئولین درس:** سیده ضحی سکاکی و حسین اصفهانی	سیده ضحی سکاکی
زبان عربی	**مسئولین درس:** پویا رضاداد مائده خدایاری **دستیار:** سارا حمزه	عمار تاجبخش، محسن احدی، کیارش پورمهدی، جواهر فرحات
تاریخ	**مسئول درس:** الناز گنج‌کار **دستیار:** الهه ریاحی‌نسب	مهسا اصغری، وجیهه صادقی
جغرافیا	**مسئول درس:** وجیهه صادقی	بهروز یحیی، مهسا اصغری
فلسفه و منطق	**مسئول درس:** نگین تربتی	اکرم یاسری، فاطمه شریف زاده

۱- (بارم کل: ۱ نمره)

الف) درست (۰/۲۵)

اگر سه عدد طبیعی متوالی را به‌صورت n، n+1 و n+2 در نظر بگیریم، داریم: $n+n+1+n+2=3n+3=3\underbrace{(n+1)}_{k}=3k$

ب) درست (۰/۲۵)

با توجه به اینکه x عدد حقیقی و y عدد صحیح است: می‌دانیم: $[x+y]=[x]+y \xrightarrow[{[y]=y}]{y\in Z} [x+y]=[x]+[y]$

رابطهٔ فوق برای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح y همواره برقرار است.

ج) نادرست (۰/۲۵)

مثال نقض زیر را ببینید: $\left.\begin{array}{l}2|4\\3|9\end{array}\right\} \Rightarrow 2+3|4+9 \Rightarrow 5|13$ نادرست

د) نادرست (۰/۲۵)

نکته: مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد m، مساوی عدد r باشد، با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم و به آن کلاس هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌گوییم.

$$[r]_m=\{x\in Z \mid x \overset{m}{\equiv} r\}=\{x\in Z \mid x=mk+r\}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۴۸ بر ۷ را می‌یابیم: $248=7\times35+3 \Rightarrow$ باقی‌مانده $=3 \Rightarrow 248\in[3]_7$

۲- (بارم کل: ۱ نمره)

الف) ۱ (۰/۲۵)

نکته: به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n\in N)$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

با استفاده از خواص هم‌نهشتی داریم:

$$a \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow a^2 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow a^2+12 \overset{5}{\equiv} 4+12 \overset{5}{\equiv} 16 \Rightarrow a^2+12 \overset{5}{\equiv} 16-3\times5 \Rightarrow a^2+12 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=1$$

ب) ۱ (۰/۲۵)

نکته (عدد اول): هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ مانند p که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز خودش و ۱ نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. به عبارتی عدد p اول است اگر و تنها اگر فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر باشد.

چون p و q دو عدد اول متمایز هستند، پس بین p^2 و q^3 هیچ عامل مشترکی به‌جز ۱ وجود ندارد، پس ب.م.م آن‌ها برابر ۱ است.

$(p^2,q^3)=1$

ج) یکشنبه (۰/۲۵)

نکته (مسائل تقویمی): اگر یک روز از تقویم در یک سال معلوم باشد و بخواهیم چندشنبه بودن روز دیگری که از نظر تاریخ، بعد از روز داده‌شده قرار گرفته (آینده) مشخص کنیم. باید اختلاف روزها را به دست آوریم و سپس اختلاف را در پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم، یعنی باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ بیابیم و در انتها به‌اندازهٔ باقی‌مانده با شروع از روز معلوم پیش می‌رویم تا به جواب برسیم.

تعداد روزها از دهم تیر تا بیستم بهمن را می‌یابیم:

$$\underset{\text{تیر}}{21}+\underset{\text{مرداد، شهریور}}{2\times31}+\underset{\text{مهر، آبان، آذر، دی}}{4\times30}+\underset{\text{بهمن}}{20}=21+62+120+20=223$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۲۳ بر ۷ را می‌یابیم: $223 \overset{7}{\equiv} 223-30\times 7 \overset{7}{\equiv} 223-210 \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 223 \overset{7}{\equiv} 13-7 \overset{7}{\equiv} 6$

اگر از دوشنبه ۶ روز جلوتر برویم به روز یکشنبه می‌رسیم.

د) $|10a^3|$ یا $10|a|^3$ (۰/۲۵)

نکته: $\forall a,b\in Z; a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$

$$2a\,|\,8a^2 \Rightarrow (2a,8a^2)=|2a|$$

$$\left[(2a,8a^2),10a^3\right]=\left[|2a|,10a^3\right]$$

$$|2a|\,|\,10a^3 \Rightarrow \left[|2a|,10a^3\right]=|10a^3|=10|a|^3$$

۳- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته (اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها): گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به این روش اثبات، «اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها» می‌گویند.

برحسب اینکه n زوج یا فرد باشد دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) n زوج باشد:

$$\overbrace{n=2k}^{(0/25)} \Rightarrow n^2-3n+5=\overbrace{(2k)^2-3(2k)+5}^{(0/25)}=4k^2-6k+4+1=\overbrace{2\underbrace{(2k^2-3k+2)}_{q}+1}^{(0/25)}=2q+1 \Rightarrow$$ n^2-3n+5 فرد است.

ب) n فرد باشد:

$$\overbrace{n=2k+1}^{(0/25)} \Rightarrow n^2-3n+5=\overbrace{(2k+1)^2-3(2k+1)+5}^{(0/25)}$$

$$=4k^2+4k+1-6k-3+5=4k^2-2k+3=4k^2-2k+2+1=\overbrace{2\underbrace{(2k^2-k+1)}_{t}+1}^{(0/25)}=2t+1 \Rightarrow$$ n^2-3n+5 فرد است.

۴- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته (اثبات به روش برهان خلف):

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همهٔ مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

اگر r عدد گویای ناصفر و a عددی گنگ باشد، طبق برهان خلف، فرض می‌کنیم $b=ra$ عددی گویا است، داریم:

$$\overbrace{b=ra}^{(0/25)} \xrightarrow{\times\frac{1}{r}} \overbrace{\frac{1}{r}\times b=\frac{1}{r}\times ra}^{(0/25)} \Rightarrow \overbrace{a=\frac{1}{r}\times b}^{(0/25)}$$

چون $\frac{1}{r}$ و b اعداد گویا هستند، پس a نیز گویا است و این خلاف فرض است؛ زیرا a عددی گنگ است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. (۰/۲۵)

۵- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی‌شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و ازآنجایی‌که همهٔ عملیات مسیر رفت، بازگشت‌پذیرند به این نوع اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

با استفاده از اثبات بازگشتی و ضرب طرفین نامساوی داده‌شده در عدد ۲، داریم:

$$x^2+4y^2 \ge 2xy+3x+6y-9 \xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+8y^2 \ge 4xy+6x+12y-18 \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+8y^2-4xy-6x-12y+18 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+x^2-4xy+4y^2+4y^2-12y+9 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2}_{(0/25)}+\underbrace{(x-2y)^2}_{(0/25)}+\underbrace{(2y-3)^2}_{(0/25)} \ge 0$$

رابطهٔ فوق همواره برقرار و بدیهی است. (۰/۲۵)

دوطرفه گذاشتن تمامی فلش‌ها (۰/۲۵)

۶- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{b+a}{ab} \Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+2ab+b^2=ab \Rightarrow a^2+ab+b^2=0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=0 \Rightarrow (a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2=0 \quad (0/25)$$

مجموع دو عبارت همواره نامنفی زمانی صفر است که هر دو با هم برابر صفر باشند، پس داریم:

$$a+\frac{1}{2}b=0 \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow b=-2a$$

$$\frac{3}{4}b^2=0 \Rightarrow b=0 \ (0/25) \Rightarrow -2a=0 \Rightarrow a=0 \ (0/25)$$

مقادیر $a=b=0$ غیرقابل قبول هستند، زیرا در عبارت $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ مخرج‌ها نباید صفر باشد، یعنی $a\neq 0$ و $b\neq 0$، پس هیچ مقادیر حقیقی و ناصفری در رابطهٔ داده‌شده صدق نمی‌کنند. $(0/25)$

ب) اگر a عددی فرد باشد، داریم:

$$a=2k+1 \Rightarrow a^3=(2k+1)^3=\underbrace{8k^3+12k^2+6k+1}_{(0/25)} \Rightarrow a^3=2\underbrace{(4k^3+6k^2+3k)}_{q}+1 \ (0/25) \Rightarrow a^3=2q+1 \ (0/25)$$

بنابراین، a^3 عددی فرد است.

۷- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: عدد صحیح a، که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است- یا a، b را می‌شمارد (a، b را عاد می‌کند) یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است- هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b=aq$. $\quad a|b \Rightarrow b=aq$

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم، $a \nmid b$

با استفاده از تعریف عاد کردن، عدد صحیحی مانند q وجود دارد که:

$$a|b \Rightarrow b=aq \ (0/25)$$

چون $b\neq 0$، پس $q\neq 0$، بنابراین q عدد صحیح غیرصفر است و داریم:

$$|q|\geq 1 \ (0/25) \xrightarrow{\times|a|} \underbrace{|a||q|\geq|a| \Rightarrow |aq|\geq|a|}_{(0/25)} \xrightarrow{b=aq} |b|\geq|a| \ (0/25)$$

۸- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند:

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|mb+nc$$

با استفاده از خواص عاد کردن، m را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a|9m+1 \\ a|5m+2 \end{cases} (0/25) \Rightarrow \underbrace{a|9(5m+2)-5(9m+1) \Rightarrow a|45m+18-45m-5}_{(0/25)} \Rightarrow a|13 \ (0/25)$$

a مقسوم‌علیه‌های صحیح ۱۳ است، پس:

$$a=\pm 1 \ , \ \pm 13 \ (0/25)$$

۹- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0; m|a, m|b \Rightarrow m\leq d$

فرض می‌کنیم $(p,a)=d$، طبق تعریف ب.م.م داریم: $\quad d|a \ , \ d|p \ (0/25)$

از رابطهٔ $d|p$ و اینکه p عددی اول است، داریم: $\quad d|p \Rightarrow d=1$ یا $p \ (0/25)$

اگر $d=p$ باشد با جای‌گذاری در $d|a$ به نتیجهٔ $p|a$ می‌رسیم که خلاف فرض است؛ زیرا $p\nmid a$، $\underbrace{\text{پس نمی‌تواند } d=p \text{ باشد و باید } d=1}_{(0/25)}$ باشد، یعنی:

$$(p,a)=1 \ (0/25)$$

۱۰- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $0\le r<b$.

طبق نکتهٔ بالا، داریم:

$$\begin{matrix} a=9q+8 \\ a=8q'+6 \end{matrix} \ (0/25) \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\times 8} 8a=72q+64 \\ \xrightarrow{\times 9} 9a=72q'+54 \end{matrix} \ (0/25)$$

طرفین دو رابطهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$9a-8a=72q'+54-72q-64 \Rightarrow a=72q'-72q-10 \ (0/25)$$

با کم و زیاد کردن عدد ۷۲ داریم:

$$a=\underbrace{72q'-72q-72+72-10}_{(0/25)}=72\underbrace{(q'-q-1)}_{k}+62 \ (0/25) \Rightarrow q=72k+62 \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=62 \ (0/25)$$

۱۱- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $3k$، $3k+1$ و $3k+2$ نوشته می‌شود.

با توجه به نکتهٔ بالا، اگر a را بر ۳ افراز کنیم، یکی از سه حالت زیر خواهیم داشت: (۰/۲۵)

الف) اگر $a=3k$ باشد، a مضرب ۳ است و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

ب) اگر $a=3k+1$ باشد، داریم:

$$\underbrace{a+2=3k+1+2}_{(0/25)}=3k+3=3\underbrace{(k+1)}_{q}=3q \ (0/25)$$

پس $a+2$ مضرب ۳ است.

ج) اگر $a=3k+2$ باشد، داریم:

$$\underbrace{a+4=3k+2+4}_{(0/25)}=3k+6=3\underbrace{(k+2)}_{t}=3t \ (0/25)$$

پس $a+4$ مضرب ۳ است.

۱۲-(بارم کل: ۱ نمره)

نکته: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b\in Z, a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m|a-b \ (m\in N)$$

با استفاده از تعریف هم‌نهشتی داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\times c} m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \ (0/25)$$

$$c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m|c-d \xrightarrow{\times b} m|b(c-d) \Rightarrow m|bc-bd \ (0/25)$$

طبق خواص عاد کردن، داریم:

$$m|ac-bc+bc-bd \ (0/25) \Rightarrow m|ac-bd \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd \ (0/25)$$

۱۳- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+c\overset{m}{\equiv}b+c \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c \end{cases}$$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n\in N)$

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+mt\overset{m}{\equiv}b+mk \\ a-mt\overset{m}{\equiv}b-mk \end{cases}$$

با استفاده از خواص هم‌نهشتی داریم:

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۱۰۰۰-۱۴۲\times ۷ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۱۰۰۰-۹۹۴ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶-۷ \overset{۷}{\equiv} -۱ \ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۵} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۵} \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۵} \overset{۷}{\equiv} -۱ \ (۰/۵) \xrightarrow{\times ۱۴} (۱۰۰۰)^{۱۵}\times ۱۴ \overset{۷}{\equiv} -۱۴ \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{-۲۰} (۱۰۰۰)^{۱۵}\times ۱۴-۲۰ \overset{۷}{\equiv} -۱۴-۲۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۷}{\equiv} -۳۴ \ (۰/۲۵) \Rightarrow A \overset{۷}{\equiv} -۳۴+۷\times ۵ \overset{۷}{\equiv} -۳۴+۳۵ \Rightarrow A \overset{۷}{\equiv} ۱ \ (۰/۵)$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۷ برابر ۱ است.

۱۴-(بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in N)$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$۱۲a+۱۴b \overset{۷}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۱۲a+۱۴b-۷\times ۲b \overset{۷}{\equiv} ۹ \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۱۲a \overset{۷}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۱۲a-۷\times ۲a \overset{۷}{\equiv} ۹-۷ \Rightarrow -۲a \overset{۷}{\equiv} ۲ \ (۰/۲۵)$$

طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\xrightarrow[\div ۲]{(۲,۷)=۱} -a \overset{۷}{\equiv} ۱ \ (۰/۲۵) \Rightarrow a \overset{۷}{\equiv} -۱ \ (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{توان}۳} a^{۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۳} \Rightarrow a^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱+۷ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow a^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۶ \ (۰/۲۵)$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{۳}$ بر ۷ برابر ۶ است.

۱۵- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹؛ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{\text{۳ یا ۹}}{\equiv} a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_۲+a_۱+a_۰$$

نکته: برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰-a_۱+a_۲-\cdots+(-۱)^n a_n$$

با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=\overline{۱۳a۴}$ بر ۹ برابر ۳ است، طبق نکتهٔ اول داریم:

$$A=\overline{۱۳a۴} \overset{۹}{\equiv} ۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۱+۳+a+۴ \overset{۹}{\equiv} ۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow a \overset{۹}{\equiv} -۵ \ (۰/۲۵) \Rightarrow a \overset{۹}{\equiv} -۵+۹ \overset{۹}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow a=۹k+۴ \ (۰/۲۵)$$

a رقم است پس فقط به‌ازای $k=۰$ مقدار قابل‌قبول $a=۴$ به‌دست می‌آید. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $A=۱۳۴۴$ را بر ۱۱ به‌دست می‌آوریم:

$$A=۱۳۴۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴-۴+۳-۱ \ (۰/۲۵) \Rightarrow A \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \ (۰/۲۵)$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۱۱ برابر ۲ است.