



گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

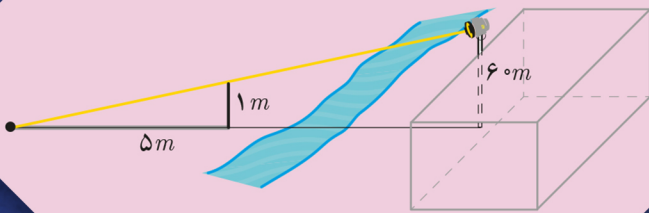
ویژه پایه یازدهم

آذر ۱۴۰۴

# دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

ریاضی ۲ (رشته علوم تجربی)



● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

## طراحان

● حسین شفیع زاده ● سید امیرمحمد سید شاکری

مسئول درس: علیرضا فاطمی

حسابان و  
ریاضی پایه

● سعید اکبرزاده ● امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: محمد تقی پور

هندسه

● سعید اکبرزاده ● امیررضا پورحسینی

مسئول درس: حسین اسدزاده

ریاضیات  
گسترده

● ایمان اردستانی ● محمد خان گلدی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان

ریاضی  
تجربی

● سعید اکبرزاده ● امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: حسین اسدزاده

ریاضی  
انسانیگروه  
ریاضیگروه ریاضی  
مدرسین: محمد سید شاکری  
۱۳۹۵-۱۳۹۶

● منصوره رئیس دانا ● علی جوهری

مسئول درس: علی جوهری

زیست  
شناسی

● احمد رضوانی ● یوسف صباغی

مسئول درس: علی کنی

فیزیک

● بابک اسفندی ● سبحان دقیق

مسئول درس: محمد وحیدی

شیمی

● حسن علی محمدی

مسئول درس: شکیبا کریمی

زمین  
شناسیگروه  
علومگروه علوم  
مدرسین: محمد حسین کشانی  
۱۳۹۵-۱۳۹۶

## طراحان

مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه  
عمومیادبیات  
فارسی

مسئول درس: محسن ابراهیم تهرانی

افشین محی الدین

دین و  
زندگی

مسئول درس: زهرا محمدی

علی اکبر آخوندی

زهرا محمدی

زبان  
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری

سعید ابراهیمی

علوم و  
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

گلاویژ جلالی

مهرابه مجتهد

جامعه  
شناسی

مسئول درس: الهام رضایی

دستیار: فاطمه صفری

فروغ تیموریان

آزیتا بیدقی

روان  
شناسی

مسئولین درس: سیده ضحی سکاکی

و حسین اصفهانی

سیده ضحی سکاکی

زبان  
عربی

مسئولین درس:

پویا رضاداد

مائده خدایاری

دستیار: سارا حمزه

عمار تاجبخش

محسن احدی

کیارش پورمهدی

جواهر فرحات

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار

دستیار: الهه ریاحی نسب

مهسا اصغری

وجیهه صادقی

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهروز یحیی

مهسا اصغری

فلسفه  
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری

فاطمه شریف زاده

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه  
انسانی



۱- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) ۱ (۰/۵)

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط  $AB$  برابر با  $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$  است.

نکته: فاصله دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  برابر با  $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$  است.

ابتدا مختصات وسط  $AB$  را پیدا می‌کنیم:

$$M(\frac{2+0}{2}, \frac{1+(-1)}{2}) = (1, 0)$$

اکنون فاصله نقطه  $M(1, 0)$  را از مبدأ مختصات  $O(0, 0)$  محاسبه می‌کنیم:

$$OM = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

ب) ۲ (۰/۵)

اگر  $a$  و  $c$  هم‌علامت نباشند، داریم:

$$\begin{cases} ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \\ b^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین معادله دارای دو ریشه حقیقی می‌باشد.

پ) دایره (۰/۵)

نکته: مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت  $O$ ، به فاصله ثابت  $r$  هستند، تشکیل یک دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  می‌دهند.

ت) استقرایی (۰/۵)

نکته: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم».

استدلال استقرایی نامیده می‌شود.

۲- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) نادرست (۰/۵)

نکته: معادله خطی با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$ ، به صورت  $y = mx + h$  است.

نکته: شرط موازی بودن دو خط، این است که شیب‌های برابر داشته باشند.

شیب خط اول برابر  $\frac{2}{3}$  است و اگر معادله خط دوم را مرتب کنیم، به صورت  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$  درمی‌آید که نشان می‌دهد شیب آن برابر  $-\frac{3}{4}$

می‌باشد. چون شیب دو خط برابر نیستند، پس موازی نمی‌باشند.

ب) درست (۰/۵)

نکته: در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، مختصات رأس سهمی به صورت  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  است.

با توجه به نکته فوق، داریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1 \Rightarrow y_S = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به صورت  $S(-1, -2)$  می‌باشد که در ناحیه سوم واقع است.

پ) درست (۰/۵)

از آنجا که عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2$$

$$\begin{cases} 2x \geq 2 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \sqrt{x-1} \geq 2$$

بنابراین  $2x + \sqrt{x-1}$  نمی‌تواند برابر صفر باشد و معادله داده شده، فاقد ریشه حقیقی است.

ت) درست (۰/۵)

نکته: قضیه‌هایی که هم خود آن‌ها و هم عکس آن‌ها درست هستند را قضیه‌های دوشروطی می‌نامیم. قضیه‌های دوشروطی را با نماد « $\Leftrightarrow$ » (اگر

و تنها اگر) نمایش می‌دهیم.



۳- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) گزینه ۴ (۰/۵)

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط  $AB$  برابر با  $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$  است.

نقطه  $B$  وسط نقاط  $A$  و  $A'$  است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \frac{a+3}{2} = 1 \Rightarrow a = -1 \\ \frac{b+(-1)}{2} = 2 \Rightarrow b = 5 \end{cases} \Rightarrow a+b=4$$

ب) گزینه ۲ (۰/۵)

نکته: در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ :

الف) اگر  $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$ ، کمترین (مینیمم) مقدار تابع درجه دوم مورد نظر به دست می آید.

ب) اگر  $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$ ، بیشترین (ماکزیمم) مقدار تابع درجه دوم مورد نظر به دست می آید.

نکته: در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، عدد ثابت  $c$ ، نشان دهنده محل برخورد نمودار آن با محور عرض هاست.

چون  $a < 0$  است، پس دهانه سهمی رو به پایین است. چون  $b > 0$  است، پس  $-\frac{b}{2a} > 0$  بوده و بنابراین طول رأس سهمی مقداری مثبت

است. چون  $c < 0$  است، پس محل تلاقی سهمی با محور عرض ها پایین تر از مبدأ مختصات می باشد.

پ) گزینه ۱ (۰/۵)

نکته: مستطیل طلائی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت

دیگر، اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب  $x$  و  $y$  باشند، داشته باشیم  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ . نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلائی گوئیم.

نکته: عدد  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  به عدد طلائی معروف است که مقدار تقریبی آن  $1/618$  می باشد.

از آنجا که طول مستطیل طلائی برابر  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  است، پس عرض آن برابر ۱ بوده و بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ت) گزینه ۲ (۰/۵)

نکته: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک

فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

با توجه به نکته فوق، محل برخورد عمودمنصف های  $AB$  و  $CD$  جواب مسئله است.

۴- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: شیب خطی که از دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  می گذرد، برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب های آن ها برابر  $(-1)$  باشد؛ یعنی اگر شیب های دو خط

$m$  و  $m'$  باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن ها آن است که  $mm' = -1$ ؛ به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: معادله خطی با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$ ، به صورت  $y = mx + h$  است.

نکته: معادله خطی با شیب  $m$  که از نقطه  $(x_0, y_0)$  عبور می کند، به صورت  $y - y_0 = m(x - x_0)$  می باشد.

$$d \text{ شیب خط } m_1 = \frac{b-a}{a-b} = -1 \quad (0/25)$$

$$l \text{ شیب خط } m_2 = \frac{-1}{m_1} = 1 \quad (0/5)$$

$$l \text{ معادله خط } y = 1 \times x + h \xrightarrow{(2, -3)} -3 = 1 \times 2 + h \Rightarrow h = -5 \Rightarrow y = x - 5 \quad (0/25)$$

$$y - (-3) = 1 \times (x - 2) \Rightarrow y = x - 5 \quad (0/5)$$

برای نوشتن معادله خط  $l$  می توان به صورت زیر نیز عمل کرد:





۷- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اگر  $\alpha$  و  $\beta$ ، صفرهای یک تابع درجه دوم باشند، آنگاه ضابطه آن به صورت  $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$  خواهد بود.

نکته: در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، مختصات رأس سهمی به صورت  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  است.

راه حل اول:

$$y = a(x-1)(x-5) \xrightarrow{(0,-1)} -1 = a(-1)(-5) \Rightarrow a = -\frac{1}{5} \quad (0/25)$$

$$y = -\frac{1}{5}(x^2 - 6x + 5) \quad \text{یا} \quad y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1 \quad (0/5)$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت زیر خواهد بود:

و داریم:

$$x_S = 3 \Rightarrow y_S = -\frac{1}{5}(9 - 18 + 5) = \frac{4}{5} \quad (0/25)$$

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(\frac{6}{5})^2 - 4(-\frac{1}{5})(-1)}{4(-\frac{1}{5})} = \frac{4}{5}$$

یا

پس بیشترین مقدار سهمی برابر  $\frac{4}{5}$  است. (0/5)

راه حل دوم:

اگر ضابطه سهمی را به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در نظر بگیریم، با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1 \Rightarrow c = -1 \\ f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (0/5) \\ f(5) = 0 \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{6}{5}, \quad c = -1 \quad (0/25)$$

از حل دستگاه سه معادله سه مجهول فوق خواهیم داشت:

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1 \quad (0/5)$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$x_S = -\frac{\frac{6}{5}}{2(-\frac{1}{5})} = 3 \Rightarrow y_S = -\frac{1}{5} \times 3^2 + \frac{6}{5} \times 3 - 1 = \frac{4}{5} \quad (0/25)$$

و داریم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(\frac{6}{5})^2 - 4(-\frac{1}{5})(-1)}{4(-\frac{1}{5})} = \frac{4}{5}$$

یا

پس بیشترین مقدار سهمی برابر  $\frac{4}{5}$  است. (0/5)

۸- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: برای حل یک معادله رادیکالی، می توان با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جوابهای حاصل در معادله اولیه صدق می کنند.

راه حل اول:

طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم:

$$x - \frac{5}{4} + x + \frac{5}{4} + 2\sqrt{(x - \frac{5}{4})(x + \frac{5}{4})} = 25 \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - \frac{25}{4}} = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{25}{4}} = \frac{25 - 2x}{2} \quad (0/5)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x^2 - \frac{25}{4}) = 625 + 4x^2 - 100x \Rightarrow 4x^2 - 25 = 625 + 4x^2 - 100x \Rightarrow 100x = 650 \Rightarrow x = 6.5 \quad (0/5)$$

چون جواب به دست آمده عبارت زیر هیچ یک از رادیکالها را منفی نمی کند (یا چون جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می کند)، پس

قابل قبول است. (0/5)



راه حل دوم:

معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x - \frac{5}{2}} = 5 - \sqrt{x + \frac{5}{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x - \frac{5}{2} = (5 - \sqrt{x + \frac{5}{2}})^2 \Rightarrow x - \frac{5}{2} = 25 - 10\sqrt{x + \frac{5}{2}} + x + \frac{5}{2} \Rightarrow 10\sqrt{x + \frac{5}{2}} = 30$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \frac{5}{2}} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + \frac{5}{2} = 9 \Rightarrow x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2} \quad (۰/۵)$$

چون جواب به دست آمده عبارت زیر هیچ یک از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند (یا چون جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کند)، پس قابل قبول است. (۰/۵)

راه حل سوم:

معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x + \frac{5}{2}} = 5 - \sqrt{x - \frac{5}{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + \frac{5}{2} = (5 - \sqrt{x - \frac{5}{2}})^2 \Rightarrow x + \frac{5}{2} = 25 - 10\sqrt{x - \frac{5}{2}} + x - \frac{5}{2} \Rightarrow 10\sqrt{x - \frac{5}{2}} = 20$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - \frac{5}{2}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x - \frac{5}{2} = 4 \Rightarrow x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2} \quad (۰/۵)$$

چون جواب به دست آمده عبارت زیر هیچ یک از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند (یا چون جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کند)، پس قابل قبول است. (۰/۵)

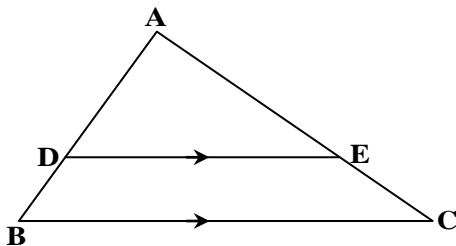
۹- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته (قضیه تالس و تعمیم آن):

اگر در شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. آنگاه:

تالس (جزء به جزء):  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تعمیم تالس (جزء به کل):  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



با توجه به تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$EF \parallel MN \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{EF}{MN} \Rightarrow \frac{2}{x+2} = \frac{3}{2x+1} \Rightarrow 4x+2 = 3x+6 \Rightarrow x = 4 \quad (۰/۵)$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{x+2}{x+2+y} = \frac{2x+1}{6y} \xrightarrow{x=4} \frac{6}{6+y} = \frac{9}{6y} \Rightarrow 36y = 9(6+y) \Rightarrow 4y = 6+y$$

$$\Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \quad (۰/۵)$$

۱۰- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: (با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند).

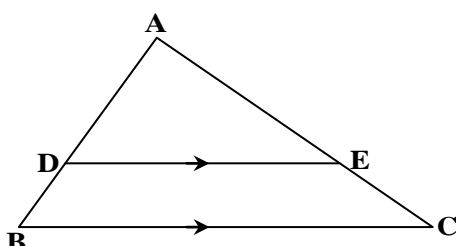
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & (\text{ترکیب نسبت در صورت}) \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} & (\text{ترکیب نسبت در مخرج}) \end{cases}$$

نکته (قضیه تالس و تعمیم آن):

اگر در شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. آنگاه:

تالس (جزء به جزء):  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تعمیم تالس (جزء به کل):  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$





با توجه به نکته فوق، می توان نوشت:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AE+DE} = \frac{2}{2+2} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{DE}{DE+AE} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

اکنون با توجه به تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$\triangle ACD : EQ \parallel CD \Rightarrow \frac{EQ}{CD} = \frac{AE}{AD} \xrightarrow{(1)} \frac{EQ}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow EQ = 2 \quad (0/25)$$

(0/5)

$$\triangle ABD : EP \parallel AB \Rightarrow \frac{EP}{AB} = \frac{DE}{AD} \xrightarrow{(2)} \frac{EP}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow EP = \frac{4}{5} \quad (0/25)$$

(0/5)

بنابراین:

$$PQ = EQ - EP = 2 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5} \quad (0/5)$$