

گزینهدو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

ویژه پایه یازدهم

آذر ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

آمار و احتمال (رشته ریاضی و فیزیک)



● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

● حسین شفیع زاده ● سید امیرمحمد سید شاکری

مسئول درس: علیرضا فاطمی

حسابان و
ریاضی پایه

● سعید اکبرزاده ● امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: محمد تقی پور

هندسه

● سعید اکبرزاده ● امیررضا پورحسینی

مسئول درس: حسین اسدزاده

ریاضیات
گسترده

● ایمان اردستانی ● محمد خان گلدی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان

ریاضی
تجربی

● سعید اکبرزاده ● امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: حسین اسدزاده

ریاضی
انسانیگروه
ریاضیگروه ریاضی
مدرسین: محمد سید شاکری
۱۳۹۵-۱۳۹۶

طراحان

● منصوره رئیس دانا ● علی جوهری

مسئول درس: علی جوهری

زیست
شناسی

● احمد رضوانی ● یوسف صباغی

مسئول درس: علی کنی

فیزیک

● بابک اسفندی ● سبحان دقیق

مسئول درس: محمد وحیدی

شیمی

● حسن علی محمدی

مسئول درس: شکیبا کریمی

زمین
شناسیگروه
علومگروه علوم
مدرسین: محمد حسین کشانی
۱۳۹۵-۱۳۹۶

مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
عمومیادبیات
فارسی

مسئول درس: محسن ابراهیم تهرانی

افشین محی الدین

دین و
زندگی

مسئول درس: زهرا محمدی

علی اکبر آخوندی

زهرا محمدی

زبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری

سعید ابراهیمی

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

گلاویژ جلالی

مهرابه مجتهد

جامعه
شناسی

مسئول درس: الهام رضایی

دستیار: فاطمه صفری

فروغ تیموریان

آزیتا بیدقی

روان
شناسی

مسئولین درس: سیده ضحی سکاکی

و حسین اصفهانی

سیده ضحی سکاکی

زبان
عربی

مسئولین درس:

پویا رضاداد

مائده خدایاری

دستیار: سارا حمزه

عمار تاجبخش

محسن احدی

کیارش پورمهدی

جواهر فرحات

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار

دستیار: الهه ریاحی نسب

مهسا اصغری

وجیهه صادقی

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهروز یحیی

مهسا اصغری

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری

فاطمه شریف زاده

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
انسانی



۱- (بارم کل: ۱ نمره)

الف) نادرست (۰/۲۵)

نکته: برای گزاره دلخواه p ، داریم:

الف) $p \wedge \sim p \equiv F$

ب) $p \vee \sim p \equiv T$

پ) $p \vee T \equiv T$

ت) $p \wedge T \equiv P$

ث) $p \vee F \equiv P$

ج) $p \wedge F \equiv F$

زیرا $p \vee F \equiv p$

(ب) درست (۰/۲۵)

نکته: جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است:

۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.

۲) ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

زیرا $\left. \begin{matrix} T \Rightarrow T \equiv T \\ F \Rightarrow T \equiv T \end{matrix} \right\}$

(ج) نادرست (۰/۲۵)

زیرا طبق نکته بخش «الف» داریم: $p \wedge \sim p \equiv F$

(د) نادرست (۰/۲۵)

نکته: عبارتهایی مانند «هر»، «به‌ازای هر»، و «به‌ازای بعضی مقادیر» به سور معروفاند. گزاره‌ها یا گزاره‌نمایی که شامل عبارتهای سوری باشند به گزاره‌های سوری معروفاند. در هر گزاره سوری که شامل متغیر باشد، دامنه متغیر باید مشخص باشد. برای بیان عبارتهای سوری با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

زیرا اصطلاح «وجود دارد» به سور وجودی دلالت دارد.

۲- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$ ، آنگاه A زیرمجموعه محض یا سره B نامیده می‌شود.

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

نکته: برای سه مجموعه A ، B و C داریم:

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

نکته: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

طبق نکات داریم:

الف) زیرمجموعه محض یا سره (۰/۲۵)

ب) U (۰/۲۵)

ج) $B \subseteq C$ (۰/۲۵)

د) γ (۰/۲۵)

زیرا مجموعه ۳ عضو دارد؛ پس $\gamma = 2^3 - 1 = 7$ زیرمجموعه ناتهی خواهد داشت.



۳- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

الف) گزینه ۲ (۰/۵)

نکته: برای دو گزاره p و q همواره داریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

نکته: برای دو گزاره p و q داریم:

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(q \Rightarrow p) \equiv (\sim q \vee p) \equiv q \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q \end{cases}$$

ب) گزینه ۴ (۰/۵)

نکته: عبارت‌هایی مانند «هر»، «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» به سور معروف‌اند. گزاره‌ها یا گزاره‌نمایی که شامل عبارت‌های سوری باشند به گزاره‌های سوری معروف‌اند. در هر گزاره سوری که شامل متغیر باشد، دامنه متغیر باید مشخص باشد. برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \forall و به‌جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود. چون عضوی در A وجود دارد که در B نیست، پس قطعاً می‌توان گفت A زیرمجموعه B نیست.

$A \not\subset B$

ج) گزینه ۳ (۰/۵)

نکته: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A ، مجموعه توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. اگر A ، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$ ، 2^n عضو دارد.

مجموعه A دارای ۳ عضو است؛ زیرا عضو a تکرار شده است؛ پس $P(A)$ دارای $2^3 = 8$ عضو و تعداد $2^8 = 256$ زیرمجموعه است.

۴- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: جدول ارزش گزاره‌های عطفی، فصلی، شرطی و دوشروطی به‌صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

(۰/۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۱)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

۵- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

به‌جای اثبات این قضیه، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم که به‌صورت زیر است: (۰/۲۵)

اگر n زوج نباشد، آنگاه n^2 زوج نیست \equiv اگر n فرد باشد، آنگاه n^2 نیز فرد است. (۰/۵)

فرد $n = 2k + 1$ (۰/۲۵) ; $k \in Z$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark \quad (۰/۵)$$

۶- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: جدول ارزش گزاره‌های عطفی، فصلی، شرطی و دوشروطی به‌صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن



د	د	ن	ن	ن	ن
---	---	---	---	---	---

از نادرستی گزاره $p \Rightarrow q$ نتیجه می‌گیریم p درست (۰/۲۵) و q نادرست (۰/۲۵) است. اکنون طبق نکته داریم:

الف) $(p \vee \sim q) \wedge r \equiv (T \vee \sim F) \wedge r \equiv (T \vee T) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$ (۰/۲۵)

ب) $p \Leftrightarrow (q \wedge r) \equiv T \Leftrightarrow (F \wedge r) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$ (۰/۲۵)

ج) $p \wedge (\sim q \vee r) \equiv T \wedge (T \vee r) \equiv T \wedge T \equiv T$ (۰/۲۵)

د) $r \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv r \Rightarrow (T \Rightarrow F) \equiv r \Rightarrow F \equiv \sim r$ (۰/۲۵)

۷- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و... می‌نامیم.

نکته: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

نکته: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$.

طبق نکات و گزاره‌نمای داده شده داریم:

در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. دامنه متغیر، تمام پیشامدهای ممکن یعنی تمام زیرمجموعه‌های فضای نمونه است، پس:

تعداد $= 2^6 = 64$ (۰/۵)

چون $P(A) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ، پس مجموعه جواب زیرمجموعه‌های ۳ عضوی فضای نمونه‌ای است، پس:

تعداد $= \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$ (۰/۵)

۸- (بارم کل: ۱ نمره)

نکته: هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

نکته: نقیض گزاره‌های سوری به صورت زیر است:

$\sim(\forall x ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x)$, $\sim(\exists x ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$

با استفاده از نکات اگر گزاره داده شده را به فرم $p \Rightarrow q$ در نظر بگیریم، باید گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را بنویسیم، داریم:

$\frac{(\forall y \in N; y^2 + 2y + 1 \neq 0)}{(۰/۵)} \Rightarrow \frac{(\exists x \in Z; x^2 \leq 0)}{(۰/۵)}$

۹- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

نکته: گزاره‌نمای شامل سور عمومی هنگامی درست است که مجموعه جواب با دامنه متغیر برابر باشد.

الف) نادرست (۰/۲۵): زیرا ریشه‌های معادله $x^2 + x = 0$ برابر صفر و -1 هستند که هیچ کدام طبیعی نیستند. (۰/۵)

ب) نادرست (۰/۲۵): زیرا به ازای $n = 4$ مقدار $3^n + 4$ برابر 85 می‌شود که مرکب است. (۰/۵)

۱۰- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$2^n - 1$

اگر فرض می‌کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش 2^n است و وقتی دو عضو از آن کم می‌شود تعداد

زیرمجموعه‌هایش 2^{n-2} می‌شود و مطابق با صورت مسئله، داریم:

$2^{n-2} = 2^n - 384$ (۰/۵) $\Rightarrow \frac{2^n}{2^2} - 2^n = -384 \Rightarrow 2^n(\frac{1}{4} - 1) = -384 \Rightarrow 2^n \times (-\frac{3}{4}) = -384$



$$\Rightarrow 2^n = \frac{-384}{-4} = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \quad (0/5) \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های محض} = 2^9 - 1 = 511 \quad (0/5)$$

۱۱- (بارم کل: ۰/۷۵) (نمره)

(الف) $A = \emptyset$ (۰/۲۵)

نکته: تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی مانند A است: $\emptyset \subseteq A$

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B و هر عضو B عضو A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

طبق نکات داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \emptyset \\ \emptyset \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = \emptyset$$

(ب) $X = U$ (۰/۲۵)

نکته: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $(A \cup B) \subseteq C$.

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B و هر عضو B عضو A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

با استفاده از نکات داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup A' \subseteq X \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{array} \right\} \Rightarrow X = U$$

(ج) $A = B$ (۰/۲۵)

نکته: برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم: $A \cap B \subseteq A$ و $A \subseteq A \cup B$

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B و هر عضو B عضو A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

طبق نکات داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B = A \cap B} A \subseteq A \cap B \xrightarrow{A \cap B \subseteq B} A \subseteq B \\ B \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B = A \cap B} B \subseteq A \cap B \xrightarrow{A \cap B \subseteq A} B \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$

۱۲- (بارم کل: ۱/۵) (نمره)

نکته: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B باشد، در این صورت A را زیرمجموعه B نامیده و می‌نویسند $A \subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A را زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

با استفاده از مفروضات مسئله داریم:

$$\forall x \in A \cap C \quad (0/25) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \quad (0/25) \xrightarrow{\substack{A \subseteq B \\ C \subseteq D}} x \in B \wedge x \in D \quad (0/25) \Rightarrow x \in B \cap D \quad (0/25) \\ \xrightarrow{B \cap D \subseteq B \cup D} x \in B \cup D \quad (0/25) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cup D \quad (0/25)$$

۱۳- (بارم کل: ۱) (نمره)

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$



۴) $A \cap U = A$

نکته (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

با استفاده از نکات داریم:

$$A \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cup U)}_{(0/25)} \cap \underbrace{(A \cap B)}_{(0/25)} = \underbrace{A \cap (U \cup B)}_{(0/25)} = \underbrace{A \cap U}_{(0/25)} = A \quad (0/25)$$

۱۴- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

می‌دانیم $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، بنابراین هر یک از گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را باید اثبات کنیم، داریم:

مرحله اول: از فرض $A \subseteq B$ ثابت می‌کنیم $A \cup B = B$.

اثبات:

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq B \end{matrix} \right\} (0/25) \Rightarrow \left. \begin{matrix} A \cup B \subseteq B \\ B \subseteq A \cup B \end{matrix} \right\} (0/25) \Rightarrow A \cup B = B \quad (0/5)$$

مرحله دوم: از فرض $A \cup B = B$ ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$.

اثبات:

$$A \subseteq A \cup B \xrightarrow{\text{فرض}} A \subseteq B \quad (0/5)$$

۱۵- (بارم کل: ۱/۷۵ نمره)

نکته: برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

نکته (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

نکته (خاصیت شرکت پذیری):

الف) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

با استفاده از نکات داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{[(A \cap B') \cup (A \cap B)]}_{(0/25)} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{(0/25)} &= \underbrace{[A \cap (B' \cup B)]}_{(0/25)} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{(0/25)} = \underbrace{(A \cap U) \cup (B \cap A')}_{(0/25)} \\ &= \underbrace{A \cup (B \cap A')}_{(0/25)} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup A')}_{(0/25)} = \underbrace{(A \cup B) \cap U}_{(0/25)} = A \cup B \end{aligned}$$