

۱۱۰- اگر دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n - b_n\}$ هر دو صعودی باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی هستند.

(۲) $\{a_n\}$ صعودی است و $\{b_n\}$ مشخص نمی‌باشد.

(۳) $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو یکنوای اکید هستند.

(۴) وضعیت یکنوایی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مشخص نمی‌شود.

۱۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

جمع دو دنباله‌ی صعودی یک دنباله‌ی صعودی است:

$$\underbrace{a_n + b_n}_{\text{صعودی}} + \underbrace{a_n - b_n}_{\text{صعودی}} = 2a_n \Rightarrow \{a_n\} \text{ صعودی است}$$

اما در مورد b_n به مثال زیر توجه کنید:

مثلاً $a_n = 2^n$ صعودی است و $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ غیریکنوا است ولی:

$$a_n + b_n = 2^n + \frac{(-1)^n}{n} = \left\{ 1, \frac{9}{2}, \frac{23}{3}, \dots \right\}$$

$$a_n - b_n = 2^n - \frac{(-1)^n}{n} = \left\{ 3, \frac{7}{2}, \frac{25}{3}, \dots \right\}$$

یعنی: $a_n \pm b_n$ همواره صعودی است، پس ممکن است جمع و تفریق صعودی باشد، اما یکی از دنباله‌ها غیریکنوا باشد.