

۱۰۴- اگر $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ ، $a_n = \frac{2}{4n+1}$ و $b_n = \frac{2}{2n+1}$ دنباله‌های

$\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به ترتیب در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۳) همگرا به ۱ و واگرا

(۱) همگرا به ۱ و همگرا به ۱

(۴) واگرا و واگرا

(۲) همگرا به ۱ و همگرا به -۱

۱۰۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = 1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ زوج} & l = 1 \\ \text{فرد } n & l = -1 \end{cases}$$

یعنی $f(b_n)$ واگرا است. پس $f(a_n)$ همگرا به ۱ و $f(b_n)$ واگرا است.