۱۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x - \text{Sin} x}{x^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) ۱

۱۳۲- گزینه ۱ پاسخ است.

راه حل اول: اگر به‌جای x صفر بگذاریم به $\frac{0}{0}$ می رسیم. پس باید رفع ابهام کنیم. برای این کار تابع را کمی تغییر می‌دهیم:

$$\frac{\tan x-\operatorname{Sin}x}{x^{3}}=\frac{\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}-\operatorname{Sin}x}{x^{3}}=\frac{\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x.x^{3}}=\frac{\operatorname{Sin}x(1-\operatorname{Cos}x)}{\operatorname{Cos}x.x^{3}}$$

حالا برای $1-\mathrm{Cos}x$ می‌توانیم از رابطه‌ی $2\mathrm{Sin}^2\frac{x}{2}$ جایگذاری کنیم:

$$\frac{\mathrm{Sin}x(2\mathrm{Sin}^2\frac{x}{2})}{x^3\mathrm{Cos}x}=\frac{2\mathrm{Sin}x}{x}\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{x}{2}}{x^2}\frac{1}{\mathrm{Cos}x}$$

و با توجه به نتیجه قضیه فشردگی می‌توانیـــم از رابطــه‌ی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin}\alpha x}{x}=\alpha$ ، حاصل حد را پیدا کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{Sin}x}{x}\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{x}{2}}{x^2}\frac{1}{\mathrm{Cos}x}=2(1)(\frac{1}{2})^2\times 1=2(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

با استفاده از هم‌ارزی‌های $\operatorname{Sin}x \underset{x\to ۰}{\sim} x$, $۱-\operatorname{Cos}x \underset{x\to ۰}{\sim} \frac{x^۲}{۲}$ مـــی‌تـــوانیم

حاصل حد را سریع‌تر پیدا کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Sin}x(۱-\operatorname{Cos}x)}{x^۳} = \lim_{x\to ۰}\frac{x(\frac{x^۲}{۲})}{x^۳} = \frac{۱}{۲}$$

راه حل سوم: نتیجه هم‌ارزی را می‌توانیـــم به خاطـــر داشتـــه باشیـــم که

$\tan x - \sin x \underset{x\to ۰}{\sim} \frac{x^۳}{۲}$ و حاصل حد، در یـــک مرحلـــه، بـــه‌صـــورت

$\lim_{x\to ۰} \frac{\frac{x^۳}{۲}}{x^۳} = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.